ESAME DI LOGICA

13 FEBBRAIO 2025

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire la regola di risoluzione di due clausole al primo ordine nella definizione estesa.

[Definizione 12.10]

Siano A e B due clausole tali che $\mathsf{FV}(A) \cap \mathsf{FV}(B) = \emptyset$. Se esistono due insiemi non vuoti di letterali $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ e $\{\neg b_1, \dots, \neg b_k\} \subseteq B$ tali che $L = \{a_1, \dots a_n, b_1, \dots, b_k\}$ sia unificabile, allora la clausola

$$R = ((A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}) \cup (B \setminus \{\neg b_1, \dots, \neg b_k\}))\sigma \ ,$$

con σ l'unificatore più generale per L, è detta *risolvente*.

(2) Mostrare che esiste un modello della teoria dei numeri reali in cui sono presenti degli infinitesimi.

[Esempio 20.7]

Estendiamo la segnatura dei reali con una nuova costante k.

Sia R la teoria dei numeri reali e sia $T = \left\{0 < k < \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Se $F \subseteq R \cup T$ è finito, esiste il massimo m per cui $\left(0 < k < \frac{1}{m+1}\right) \in F$ oppure $m = 0$ se $F \cap T = \emptyset$. Quindi, interpretando k in $\frac{1}{m+2}$, F è valido nel modello standard.

Pertanto, per il Teorema di Compattezza, $R \cup T$ ha un modello, e k deve essere un infinitesimo, essendo più piccolo di ogni nuero reale positivo, ma strettamente maggiore di 0. Lo stesso modello valida R, quindi è un modello alternativo dei reali con un elemento infinitesimo.

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente enunciato:

In qualsiasi reticolo distributivo, per ogni x, y e z,

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \ .$$

[Enunciato 6.10]

$$
\begin{aligned}
& (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\
= {} & ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{distributività} \\
= {} & (x \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{distributività due volte} \\
= {} & x \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{idempotenza} \\
= {} & x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{assorbimento} \\
= {} & x \vee (y \wedge z) && \text{assorbimento}
\end{aligned}
$$

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash A \supset B = \neg B \supset \neg A$ in logica proposizionale classica.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \supset B]^1 \quad [A]^2}{B}\,{\scriptstyle \supset E} \qquad [\neg B]^3}{\bot}\,{\scriptstyle \neg E}}{\neg A}\,{\scriptstyle \neg I^2}}{\neg B \supset \neg A}\,{\scriptstyle \supset I^3}}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}\,{\scriptstyle \supset I^1}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vee \neg B}\,{\scriptstyle \mathrm{lem}} \qquad [B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B \supset \neg A]^2 \quad [\neg B]^1}{\neg A}\,{\scriptstyle \supset E} \qquad [A]^3}{\bot}\,{\scriptstyle \neg E}}{B}\,{\scriptstyle \bot E}}{B}\,{\scriptstyle \vee E^1}}{A \supset B}\,{\scriptstyle \supset I^3}}{(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)}\,{\scriptstyle \supset I^2}
$$

(2) Calcolare $0 + 1 =_\beta 1$ in λ-calcolo puro dove i numeri naturali siano rappresentati come numerali di Church.

$$
\begin{aligned}
& 0 + 1 \\
\equiv {} & (\lambda x, y, s, z.\, x\, s\, (y\, s\, z))\, 0\, 1 \\
=_\beta {} & \lambda s, z.\, 0\, s\, (1\, s\, z) \\
\equiv {} & \lambda s, z.\, (\lambda x, y.\, y)\, s\, (1\, s\, z) \\
=_\beta {} & \lambda s, z.\, 1\, s\, z \\
\equiv {} & \lambda s, z.\, (\lambda x, y.\, x\, (0\, x\, y))\, s\, z \\
=_\beta {} & \lambda s, z.\, s\, (0\, s\, z) \\
\equiv {} & 1 \ .
\end{aligned}
$$