ESAME DI LOGICA

29 GENNAIO 2025

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire l'operazione di sostituzione di un termine in una formula nella logica classica al primo ordine.

[Definizione 9.10]

Fissata una segnature e una formula A su di essa, la *sostituzione* della variabile $x\colon s$ con il termine $t\colon s$, che produce $A[t/x]$, è definita per induzione sulla struttura della formula A:

- se $A \equiv \top$ o $A \equiv \bot$, allora $A[t/x] = A$;
- se $A \equiv r(t_1, \ldots, t_n)$, allora $A[t/x] = r(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$;
- se $A \equiv \neg B$, allora $A[t/x] = \neg B[t/x]$;
- se $A \equiv B \wedge C$, $A \equiv B \vee C$, o $A \equiv B \supset C$, allora $A[t/x] = B[t/x] \wedge C[t/x]$, $A[t/x] = B[t/x] \vee C[t/x]$, o $A[t/x] = B[t/x] \supset C[t/x]$, rispettivamente;
- se $A \equiv \forall y\colon r.\, B$, o $A \equiv \exists y\colon r.\, B$, e $y\colon r \equiv x\colon s$, allora $A[t/x] = A$;
- se $A \equiv \forall y\colon r.\, B$, o $A \equiv \exists y\colon r.\, B$, e $y\colon r \not\equiv x\colon s$, allora $A[t/x] = \forall z\colon r.\, (B[z/y])[t/x]$, o $A[t/x] = \exists z\colon r.\, (B[z/y])[t/x]$, rispettivamente, dove $z\colon r \notin \mathsf{FV}(B) \cup \mathsf{FV}(t)$.

(2) Si definisca il combinatore Null che β-riduce a true se viene applicato ad una lista vuota, e β-riduce a false se viene applicato ad una lista non vuota.

[Slide 322]

$$\mathsf{Null} \equiv \lambda x.\, (\lambda u, v.\, \mathsf{false})\, \mathsf{true}$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

Esiste un modello non standard dell'aritmetica.

[Enunciato 20.4]

Sia $S^0(0) = 0$, e $S^{i+1}(0) = S\, S^i(0)$. Sia $\Sigma_n = \{x \neq S^i(0) : i < n\}$ una collezione di formule per ogni $n \in \mathbb{N}$ con x una variabile fissata, e sia $\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$.

Detta $\mathcal{M}$ la struttura del modello standard, e definendo σ_n in modo tale che $\sigma_n(x) = n$, il modello standard $(\mathcal{M}, \sigma_n)$ rende vera Σ_n con tutte le formule chiuse vere nell'aritmetica.

Pertanto, ogni $\Xi \subset \Sigma$ finito ha un modello, essendo contenuto in Σ_n per qualche n. Quindi, per il Teorema di Compattezza, Σ ha un modello $(\mathcal{N}, \sigma)$ che rende vera anche la teoria dell'aritmetica.

In questo modello $\sigma(x) \neq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ poiché $[\![S^n(0)]\!]_{\mathcal{N}} = n$ ma $x \neq S^n(0)$ occorre in Σ, quindi, per definizione di interpretazione, $\sigma(x) \neq [\![S^n(0)]\!]_{\mathcal{N}}$. Quindi esiste un elemento $k \notin \mathbb{N}$ tale che $\sigma(x) = k$. Ma interpretando x su $\mathcal{M}$ ci porta a qualche $n \in \mathbb{N}$, qualsiasi valutazione delle variabili possiamo scegliere. Quindi, ogni funzione che mappi $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ deve essere non invertibile sul termine x.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash (A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$ in logica proposizionale intuizionista.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \supset (B \supset C)]^1 \quad [A]^2}{B \supset C}\supset\mathrm{E} \qquad \dfrac{[A \supset B]^3 \quad [A]^2}{B}\supset\mathrm{E}}{C}\supset\mathrm{E}}{A \supset C}\supset\mathrm{I}^2}{(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)}\supset\mathrm{I}^1}{(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))}\supset\mathrm{I}^3
$$

(2) Calcolare la forma normale congiuntiva e la forma normale disgiuntiva di $x \wedge y \supset \neg x \vee z$.

Calcolando,

$$
\begin{aligned}
& x \wedge y \supset \neg x \vee z \\
&= \neg(x \wedge y) \vee (\neg x \vee z) \\
&= \neg x \vee \neg y \vee \neg x \vee z \\
&= \neg x \vee \neg y \vee z \ ,
\end{aligned}
$$

che è una clausola, quindi la forma normale congiuntiva cercata è la clausola $\neg x \vee \neg y \vee z$.

Osserviamo che $\neg x \vee \neg y \vee z$ è anche una forma normale disgiuntiva costituita dagli implicanti $\neg x$, $\neg y$ e z.