ESAME DI LOGICA

19 DICEMBRE 2024

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire la traduzione di Gödel-Gentzen.

[Definizione 18.2]

La *traduzione di Gödel-Gentzen* è una mappa da formule in formule induttivamente definita come:

- $(\top)^N = \top$, $(\bot)^N = \bot$;
- per ogni A atomica, $(A)^N = \neg\neg A$;
- $(A \wedge B)^N = (A)^N \wedge (B)^N$;
- $(A \vee B)^N = \neg \left(\neg (A)^N \wedge \neg (B)^N\right)$;
- $(A \supset B)^N = (A)^N \supset (B)^N$;
- $(\forall x \colon s.\, A)^N = \forall x \colon s.\, (A)^N$;
- $(\exists x \colon s.\, A)^N = \neg\forall x \colon s.\, \neg (A)^N$.

(2) Si rappresenti nel λ-calcolo la struttura dati degli alberi binari:

$$\mathsf{BinaryTree}(A) = \langle \{A, T\}; \{\mathsf{leaf} \colon A \to T; \mathsf{node} \colon A \times T \times T \to T\} \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathsf{leaf} &\equiv \lambda x, u, v.\, u\, x \\ \mathsf{node} &\equiv \lambda x, y, z, u, v.\, v\, x\, (y\, u\, v)\, (z\, u\, v) \end{aligned}$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> In ogni reticolo distributivo e complementato, ogni elemento x ha un unico complemento, denotato da $\neg x$.

[Enunciato 6.13]

Supponiamo che l'elemento x abbia due complementi y e z. Allora, per definizione di complemento: $x \wedge y = \bot = x \wedge z$ e $x \vee y = \top = x \vee z$. Perciò

$$\begin{aligned}
& y \\
&= y \wedge \top \\
&= y \wedge (x \vee z) \\
&= (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \\
&= (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\
&= z \wedge (x \vee y) \\
&= z \wedge \top \\
&= z \ .
\end{aligned}$$

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash (\exists x.\, A \wedge B) \supset (\exists x.\, A) \wedge (\exists x.\, B)$. Si mostri un controesempio all'implicazione inversa.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x.\, A \wedge B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\wedge E_1}{\exists x.\, A}\exists I \qquad \dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{B}\wedge E_2}{\exists x.\, B}\exists I}{(\exists x.\, A) \wedge (\exists x.\, B)}\wedge I}{(\exists x.\, A) \wedge (\exists x.\, B)}\exists E^2}{(\exists x.\, A \wedge B) \supset (\exists x.\, A) \wedge (\exists x.\, B)}\supset I^1$$

Si consideri la teoria dell'aritmetica. Sia A la formula che afferma "x è pari e maggiore di 3", e sia B la formula che afferma "x è primo". Chiaramente, esiste un x per cui A sia vera, ad esempio 4; anche, esiste un x per cui B sia vera, ad esempio 7. Ma non esiste un numero primo pari maggiore di 3.

(2) Siano $\mathsf{K} \equiv \lambda x, y.\, x$ e $\mathsf{S} \equiv \lambda x, y, z.\, x\, z\, (y\, z)$. Dimostrare che $\mathsf{S}\,\mathsf{K}\,\mathsf{K} =_\beta \lambda x.\, x$.

$$\begin{aligned}
& \mathsf{S}\,\mathsf{K}\,\mathsf{K} \\
&\equiv (\lambda x, y, z.\, x\, z\, (y\, z))\, \mathsf{K}\,\mathsf{K} \\
&=_\beta (\lambda y, z.\, \mathsf{K}\, z\, (y\, z))\, \mathsf{K} \\
&\equiv (\lambda y, z.\, (\lambda x, y.\, x)\, z\, (y\, z))\, \mathsf{K} \\
&=_\beta (\lambda y, z.\, (\lambda y.\, z)\, (y\, z))\, \mathsf{K} \\
&=_\beta (\lambda y, z.\, z)\, \mathsf{K} \\
&=_\beta \lambda z.\, z \\
&=_\alpha \lambda x.\, x \ .
\end{aligned}$$