ESAME DI LOGICA

3 SETTEMBRE 2024

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Si definisca l'operazione di sostituzione nel λ-calcolo puro.

[Definizione 14.4]

Per ogni M, N λ-termini, e x variabile, $M[N/x]$ è la *sostituzione* di x con N in M, definita per induzione su M come:

- $x[N/x] \equiv N$;
- $y[N/x] \equiv y$, quando $x \not\equiv y$;
- $(PQ)[N/x] \equiv (P[N/x])(Q[N/x])$;
- $(\lambda x.\, P)[N/x] \equiv \lambda x.\, P$;
- $(\lambda y.\, P)[N/x] \equiv \lambda y.\, P[N/x]$, quando $x \not\equiv y$ e $y \notin \mathsf{FV}(N)$;
- $(\lambda y.\, P)[N/x] \equiv \lambda z.\, (P[z/y])[N/x]$, quando $x \not\equiv y$ e $y \in \mathsf{FV}(N)$ e $z \notin \mathsf{FV}(P) \cup \mathsf{FV}(N)$.

(2) Si definisca nel λ-calcolo il funzionale filter, il quale, dato un predicato p, ovvero una funzione che ritorni un valore booleano, e una lista L, ritorna la sottolista di L i cui elementi rendano p vera.

[Slide 338]

$$\begin{aligned} \mathsf{filter}\; p\; [] &= [] \\ \mathsf{filter}\; p\; (x :: xs) &= \mathsf{if}\; (p\; x)\; \mathsf{then}\; (x :: (\mathsf{filter}\; p\; xs))\; \mathsf{else}\; (\mathsf{filter}\; p\; xs)\;\; . \end{aligned}$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente enunciato:

> Se le relazioni $P, Q \subseteq \mathbb{N}^k$ sono rappresentabili nell'aritmetica di Peano, lo sono anche $\neg P$, $P \wedge Q$, e $P \vee Q$.

[Enunciato 21.3] Poiché P e Q sono rappresentabili, ci sono ϕ_P e ϕ_Q come per la definizione di rappresentabilità.

Quindi, $(n_1, \ldots, n_k) \in \neg P$ se e solo se $(n_1, \ldots, n_k) \notin P$. Perciò, $\neg\phi_P$ rappresenta $\neg P$, perché $\neg\neg\phi_P(n_1, \ldots, n_k) = \phi_P(n_1, \ldots, n_k)$.

Anche, $(n_1, \ldots, n_k) \in P \wedge Q$ se e solo se $(n_1, \ldots, n_k) \in P$ e $(n_1, \ldots, n_k) \in Q$. Quindi $\phi_{P\wedge Q} = \phi_P \wedge \phi_Q$. In modo simile, $\phi_{P\vee Q} = \phi_P \vee \phi_Q$.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si dimostri $\vdash A \supset (B \supset C) = A \wedge B \supset C$ nella logica proposizionale intuizionista.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \supset (B \supset C)]^1 \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{E}_1}}{B \supset C}\,{\scriptstyle \supset \mathrm{E}} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{B}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{E}_2}}{C}\,{\scriptstyle \supset \mathrm{E}}}{A \wedge B \supset C}\,{\scriptstyle \supset \mathrm{I}^2}}{(A \supset (B \supset C)) \supset (A \wedge B \supset C)}\,{\scriptstyle \supset \mathrm{I}^1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B \supset C]^1 \qquad \dfrac{[A]^2 \quad [B]^3}{A \wedge B}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{I}}}{C}\,{\scriptstyle \supset \mathrm{E}}}{B \supset C}\,{\scriptstyle \supset \mathrm{I}^3}}{A \supset (B \supset C)}\,{\scriptstyle \supset \mathrm{I}^2}}{(A \wedge B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))}\,{\scriptstyle \supset \mathrm{I}^1}$$

(2) Mostrare che se $[\![A]\!] \leq [\![B]\!]$ in ogni algebra Booleana, allora $\vdash A \supset B$.
Per il Teorema di Completezza, se $[\![A]\!] \leq [\![B]\!]$ allora $A \vdash B$.
Quindi $\vdash A \supset B$ per introduzione dell'implicazione.