ESAME DI LOGICA

18 LUGLIO 2024

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire l'interpretazione delle formule in una Σ-struttura.

[Definizione 11.3]

Sia $\Sigma = \langle S; F, R \rangle$ una segnatura, sia $\mathcal{M}$ una Σ-struttura, e sia v una *valutazione delle variabili*, con la usuale notazione.

Quindi, una formula A è interpretata secondo la seguente definizione induttiva sulla sua struttura:

- se $A \equiv \top$, $[\![A]\!] = 1$; se $A \equiv \bot$, $[\![A]\!] = 0$;
- se $A \equiv r(t_1, \ldots, t_n)$, $[\![A]\!] = 1$ quando $([\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]) \in [\![r]\!]$, e $[\![A]\!] = 0$ altrimenti;
- se $A \equiv \neg B$, $A \equiv B \wedge C$, $A \equiv B \vee C$, $A \equiv B \supset C$ allora $[\![A]\!]$ è definita come nella semantica a tavole di verità;
- se $A \equiv \forall x \colon s.\, B$ o $A \equiv \exists x \colon s.\, B$ allora, $[\![\forall x \colon s.\, B]\!]_v = 1$ se, per ogni $\xi \in v \setminus x$, $[\![B]\!]_\xi = 1$, e $[\![\forall x \colon s.\, B]\!]_v = 0$ altrimenti. Analogamente, $[\![\exists x \colon s.\, B]\!]_v = 1$ se esiste $\xi \in v \setminus x$ tale che $[\![B]\!]_\xi = 1$, e $[\![\exists x \colon s.\, B]\!]_v = 0$ altrimenti.

(2) Mostrare che esiste un modello dei numeri reali in cui vi sia un numero infinito

[Esempio 20.6]

Sia R la teoria dei numeri reali. Estendiamo la segnatura dei numeri reali con una nuova costante ∞. Sia $T = \{n < \infty \colon n \in \mathbb{N}\}$ e consideriamo la teoria $R \cup T$.

Se $F \subseteq R \cup T$ è finito, allora il massimo m tale che o $(m < \infty) \in F$ oppure $m = 0$ è definito. Quindi, interpretare ∞ in $m + 1$ nel modello standard dei reali rende F vero.

Quindi, per il Teorema di Compattezza, $R \cup T$ ha un modello, e ∞ deve essere interpretato in un elemento che sia più grande di ogni numero naturale. Lo stesso modello rende vero R che quindi diviene un modello alternativo dei numeri reali, in cui esiste un elemento infinito.

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri la seguente proprietà:

Per ogni x e y in un reticolo, $x \vee (x \wedge y) = x$ e $x \wedge (x \vee y) = x$.

[Enunciato 6.9]

Dimostriamo $x \vee (x \wedge y) = x$.

Per definizione di join, $x \leq x \vee (x \wedge y)$, quindi è sufficiente mostrare che $x \vee (x \wedge y) \leq x$.

Ma $x \leq x$ per riflessività, e $x \wedge y \leq x$ per definizione di meet, quindi $x \vee (x \wedge y) \leq x$ per definizione di join.

L'altra parte segue per dualità.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash \forall x.\, (B \supset A) = B \supset \forall x.\, A$ con $x \notin \mathsf{FV}(B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^1 \qquad \dfrac{[\forall x.\, B \supset A]^2}{B \supset A}\,{\scriptstyle \forall\mathrm{E}}}{A}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{E}}}{\forall x.\, A}\,{\scriptstyle \forall\mathrm{I}}}{B \supset \forall x.\, A}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}}{(\forall x.\, B \supset A) \supset (B \supset \forall x.\, A)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \supset \forall x.\, A]^1 \quad [B]^2}{\forall x.\, A}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{E}}}{A}\,{\scriptstyle \forall\mathrm{E}}}{B \supset A}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^2}}{\forall x.\, B \supset A}\,{\scriptstyle \forall\mathrm{I}}}{(B \supset \forall x.\, A) \supset (\forall x.\, B \supset A)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}$$

(2) Calcolare $1 + 0 =_\beta 1$ in λ-calcolo in cui i naturali siano rappresentati come numerali di Church.

$$\begin{aligned}
& 1 + 0 \\
\equiv\; & (\lambda x, y, s, z.\, x\, s\, (y\, s\, z))\, 1\, 0 \\
=_\beta\; & \lambda s, z.\, 1\, s\, (0\, s\, z) \\
\equiv\; & \lambda s, z.\, (\lambda x, y.\, x\, (0\, x\, y))\, s\, (0\, s\, z) \\
=_\beta\; & \lambda s, z.\, s\, (0\, s\, (0\, s\, z)) \\
\equiv\; & \lambda s, z.\, s\, ((\lambda x, y.\, y)\, s\, (0\, s\, z)) \\
=_\beta\; & \lambda s, z.\, s\, (0\, s\, z) \\
\equiv\; & 1 \enspace .
\end{aligned}$$