ESAME DI LOGICA

27 GIUGNO 2024

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Si definisca la traduzione di Gödel-Gentzen dalla logica classica alla logica intuizionista.

[Definizione 18.2]

La *traduzione di Gödel-Gentzen* è una mappa da formule in formule induttivamente definita come:

- $(\top)^N = \top$, $(\bot)^N = \bot$;
- per ogni A atomica, $(A)^N = \neg\neg A$;
- $(A \wedge B)^N = (A)^N \wedge (B)^N$;
- $(A \vee B)^N = \neg\left(\neg (A)^N \wedge \neg (B)^N\right)$;
- $(A \supset B)^N = (A)^N \supset (B)^N$;
- $(\forall x \colon s.\, A)^N = \forall x \colon s.\, (A)^N$;
- $(\exists x \colon s.\, A)^N = \neg\forall x \colon s.\, \neg (A)^N$.

(2) Mostrare che la collezione delle sequenze finite di naturali è in corrispondenza biunivoca con i naturali: $\mathbb{N}^* \cong \mathbb{N}$.

[Esempio 23.4]

Ovviamente, la funzione $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ che mappa $x \mapsto \{x\}$ è iniettiva.

Nel senso opposto, chiamando $g_n \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ la biiezione dal prodotto cartesiano di $n \geq 1$ copie di $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, possiamo definire una funzione $h \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ come $h\left(\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}\right) = (n, g_n(x_1, \dots, x_n))$. Per $n = 0$, sia $h(\emptyset) = (0, 0)$.

Evidentemente, h è iniettiva poiché g_n lo è per ogni $n \geq 1$. Quindi, la composizione $g_2 \circ h$ è iniettiva, e il risultato segue dal Teorema di Schröder-Bernstein.

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> Un insieme finito di clausole S è insoddisfacibile se e solo se $S \vdash_{\mathsf{res}} \bot$.

[Teorema 12.4]

Sia $S \vdash_{\mathsf{res}} \bot$. Supponiamo che S sia soddisfacibile.

Quindi esiste una interpretazione $[\![\ ]\!]$ tale che $[\![S]\!] = 1$. Per induzione sulla dimostrazione e per l'Enunciato 12.3, è immediato concludere che $[\![\bot]\!] = 1$, impossibile. Pertanto, S deve essere insoddisfacibile.

Sia S insoddisfacibile.

Per induzione su n, dimostriamo che se T è insoddisfacibile e contiene n variabili distinte, allora $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$:

- se $n = 0$, allora necessariamente $T = \{\bot\}$, in quanto $T = \emptyset$ è soddisfacibile da qualsiasi assegnamento. Quindi $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ per assunzione.
- se T contiene $n + 1$ variabili, possiamo supporre senza ledere la generalità che nessuna clausola di T contenga un letterale e la sua negazione.

  Prendiamo una variabile x e costruiamo

$$
\begin{aligned}
T_x &= \{c \setminus \{x\} : c \in T \wedge \neg x \notin c\} \\
T'_x &= \{c : c \in T \wedge \neg x \notin c\} \\
T_{\neg x} &= \{c \setminus \{\neg x\} : c \in T \wedge x \notin c\} \\
T'_{\neg x} &= \{c : c \in T \wedge x \notin c\}
\end{aligned}
$$

  T_x e $T_{\neg x}$ sono insoddisfacibili e contengono n variabili.

Infatti, se T_x fosse soddisfatto da σ, allora σ estesa ad x ponendo $\sigma(x) = 0$ renderebbe vero T contro ipotesi. Analogamente per $T_{\neg x}$.

Quindi, per ipotesi induttiva $T_x \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ e $T_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \bot$.

Nelle due dimostrazioni, ripristinando la variabile x ove sia stata elisa, otteniamo che $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ oppure $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} x$, e $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ oppure $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \neg x$.

Se $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ o $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \bot$, allora $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ con la medesima prova.

Altrimenti $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} x$ e $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \neg x$, quindi $T \vdash_{\mathsf{res}} x$ e $T \vdash_{\mathsf{res}} \neg x$ con le stesse derivazioni. Quindi, con un passo di risoluzione, $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash A \supset B = \neg A \vee B$ nella logica classica proposizionale.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\,\text{lem} \qquad \dfrac{\dfrac{[A \supset B]^1 \quad [A]^2}{B}\,{\supset}\mathrm{E}}{\neg A \vee B}\,{\vee}\mathrm{I}_2 \qquad \dfrac{[\neg A]^2}{\neg A \vee B}\,{\vee}\mathrm{I}_1}{\neg A \vee B}\,{\vee}\mathrm{E}^2}{(A \supset B) \supset \neg A \vee B}\,{\supset}\mathrm{I}^1
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A \vee B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^3}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{B}\,{\bot}\mathrm{E} \qquad [B]^2}{B}\,{\vee}\mathrm{E}^2}{A \supset B}\,{\supset}\mathrm{I}^3}{\neg A \vee B \supset (A \supset B)}\,{\supset}\mathrm{I}^1
$$

(2) Usando la definizione di take per le liste, mostrare la β-riduzione di $\mathsf{take}\,[9,7,5,3]\,2$ in forma normale.

Rammentiamo che

$$\begin{aligned}\mathsf{take}\,[\,]\,n &= [\,]\\ \mathsf{take}\,(x :: xs)\,n &= \mathsf{if}\ (n > 0)\ \mathsf{then}\ x :: (\mathsf{take}\ \ xs\,(n-1))\ \mathsf{else}\ [\,]\ \ .\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}&\mathsf{take}\,[9,7,5,3]\,2\\ \equiv\ &\mathsf{if}\ (2 > 0)\ \mathsf{then}\ 9 :: (\mathsf{take}\ \ [7,5,3]\,1)\ \mathsf{else}\ [\,]\\ \rhd_\beta\ &9 :: (\mathsf{take}\,[7,5,3]\,1)\\ \equiv\ &9 :: (\mathsf{if}\ (1 > 0)\ \mathsf{then}\ 7 :: (\mathsf{take}\,[5,3]\,0)\ \mathsf{else}\ [\,])\\ \rhd_\beta\ &9 :: 7 :: (\mathsf{take}\,[5,3]\,0)\\ \equiv\ &9 :: 7 :: (\mathsf{if}\ (0 > 0)\ \mathsf{then}\ 5 :: (\mathsf{take}\,[3]\ (-1))\ \mathsf{else}\ [\,])\\ \rhd_\beta\ &9 :: 7 :: [\,]\\ \equiv\ &[9,7]\ \ .\end{aligned}$$