ESAME DI LOGICA

6 GIUGNO 2024

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire la semantica delle formule in logica classica proposizionale rispetto alle algebre di Boole.

[Definizione 7.1]

Fissata un'algebra Booleana $\mathcal{O} = \langle O; \leq \rangle$, e una funzione $v \colon V \to O$ che mappa ogni variabile in un elemento dell'algebra, l'interpretazione $[\![A]\!]$ di una formula A è definita per induzione come:

- se A è una variabile, $[\![A]\!] = v(A)$;
- se $A \equiv \top$, $[\![A]\!] = \top$, il massimo elemento in $\mathcal{O}$;
- se $A \equiv \bot$, $[\![A]\!] = \bot$, il minimo elemento in $\mathcal{O}$;
- se $A \equiv B \wedge C$, $[\![A]\!] = [\![B]\!] \wedge [\![C]\!]$, il meet dell'interpretazione dei congiunti;
- se $A \equiv B \vee C$, $[\![A]\!] = [\![B]\!] \vee [\![C]\!]$, il join dell'interpretazione dei disgiunti;
- se $A \equiv B \supset C$, $[\![A]\!] = \neg[\![B]\!] \vee [\![C]\!]$, ovvero $[\![A]\!] = [\![\neg B \vee C]\!]$, interpretando l'implicazione come un *complemento relativo*;
- se $A \equiv \neg B$, $[\![A]\!] = \neg[\![B]\!]$, il complemento dell'interpretazione di B.

(2) Si mostri come $1 + 1 =_\beta 2$ nel λ-calcolo puro usando la rappresentazione dei numeri naturali data dai numerali di Church.

[Esempio 14.18]

$$
\begin{aligned}
& 1 + 1 \\
\equiv\ & (\lambda x, y, s, z.\, xs(ysz))1\,1 \\
=_\beta\ & (\lambda y, s, z.\, 1s(ysz))1 \\
=_\beta\ & \lambda s, z.\, 1s(1sz) \\
\equiv\ & \lambda s, z.\, (\lambda x, y.\, x(0xy))s(1sz) \\
=_\beta\ & \lambda s, z.\, s(0s(1sz)) \\
\equiv\ & \lambda s, z.\, s((\lambda x, y.\, y)s(1sz)) \\
=_\beta\ & \lambda s, z.\, s(1sz) \\
\equiv\ & 2
\end{aligned}
$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente enunciato:

> Fissiamo un linguaggio al prim'ordine con una sola sorta. Se un insieme di formule chiuse S ha modelli finiti arbitrariamente grandi, allora ha anche un modello infinito.

[Enunciato 20.5]

Definiamo $\tau_n = \exists x_1, \ldots, x_n. \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$. Chiaramente, τ_n vale in ogni modello il cui universo contenga almeno n elementi distinti.

Consideriamo un qualsiasi sottoinsieme finito $F \subseteq S \cup \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sia $K = F \cap \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$. Poiché F è finito, K è finito, quindi $m = \max\{n : \tau_n \in K\}$ è definito (se $K = \emptyset$, fissiamo $m = 0$). Pertanto, dato che S ha modelli finiti arbitrariamente grandi per ipotesi, F ha un modello finito più grande di m.

Quindi, per il Teorema di Compattezza, $S \cup \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ ha un modello $\mathcal{M}$. Poiché τ_n deve valere per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}$ deve avere più di n elementi distinti nel suo universo per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi deve essere infinito.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash (\exists x. \forall y. A) \supset \forall y. \exists x. A$ nella logica classica al primo ordine.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x. \forall y. A]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y. A]^2}{A}\,\forall\mathrm{E}}{\exists x. A}\,\exists\mathrm{I}}{\forall y. \exists x. A}\,\forall\mathrm{I}}{\forall y. \exists x. A}\,\exists\mathrm{E}^2}{(\exists x. \forall y. A) \supset \forall y. \exists x. A}\,\supset\mathrm{I}^1$$

(2) Si mostri un λ-termine che abbia una forma normale, ma non sia fortemente normalizzabile.

Si consideri $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega$ dove $\mathsf{K} \equiv \lambda x, y. x$ e $\Omega \equiv (\lambda x. x\,x)\,(\lambda x. x\,x)$.

Calcolando: $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega \equiv (\lambda x, y. x)\,\mathsf{K}\,\Omega \rhd_\beta \mathsf{K} \equiv \lambda x, y. x$ che è irriducibile, quindi una forma β-normale per definizione.

Ma anche $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega \equiv \mathsf{K}\,\mathsf{K}\,((\lambda x. x\,x)\,(\lambda x. x\,x)) \rhd_\beta \mathsf{K}\,\mathsf{K}\,((\lambda x. x\,x)\,(\lambda x. x\,x))$ in un passo. Quindi $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega$ riduce in un passo a sé stesso e iterando la medesima riduzione, questa è sempre estendibile. Pertanto il termine $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega$ non è fortemente normalizzabile.