ESAME DI LOGICA

08 FEBBRAIO 2024

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire il risolvente di due clausole al primo ordine nella definizione estesa.

[Definizione 12.10]

Siano A e B due clausole tali che $\mathsf{FV}(A) \cap \mathsf{FV}(B) = \emptyset$. Se esistono due insiemi non vuoti di letterali $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ e $\{\neg b_1, \ldots, \neg b_k\} \subseteq B$ tali che $L = \{a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_k\}$ sia unificabile, allora la clausola

$$R = ((A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}) \cup (B \setminus \{\neg b_1, \ldots, \neg b_k\}))\sigma \ ,$$

con σ l'unificatore più generale per L, è detta *risolvente*.

(2) Mostrare che esiste un modello della teoria dei numeri reali in cui sono presenti degli infinitesimi.

[Esempio 20.7]

Estendiamo la segnatura dei reali con una nuova costante k.

Sia R la teoria dei numeri reali e sia $T = \left\{0 < k < \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Se $F \subseteq R \cup T$ è finito, esiste il massimo m per cui $\left(0 < k < \frac{1}{m+1}\right) \in F$ oppure $m = 0$ se $F \cap T = \emptyset$. Quindi, interpretando k in $\frac{1}{m+2}$, F è valido nel modello standard.

Pertanto, per il Teorema di Compattezza, $R \cup T$ ha un modello, e k deve essere un infinitesimo, essendo più piccolo di ogni nuero reale positivo, ma strettamente maggiore di 0. Lo stesso modello valida R, quindi è un modello alternativo dei reali con un elemento infinitesimo.

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> In qualsiasi reticolo distributivo, per ogni x, y e z, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

[Enunciato 6.12]

$$\begin{aligned}
& (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\
&= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{distributività} \\
&= (x \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{distributività due volte} \\
&= x \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{idempotenza} \\
&= x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{assorbimento} \\
&= x \vee (y \wedge z) && \text{assorbimento}
\end{aligned}$$

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash (\exists x.\, A \wedge B) \supset (\exists x.\, A) \vee (\exists x.\, B)$ in logica intuizionista al primo ordine. Mostrare un controesempio all'implicazione inversa.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x.\, A \wedge B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^2}{A}\,\wedge E_1}{\exists x.\, A}\,\exists I}{(\exists x.\, A) \vee (\exists x.\, B)}\,\vee I_1}{(\exists x.\, A) \vee (\exists x.\, B)}\,\exists E^2}{(\exists x.\, A \wedge B) \supset (\exists x.\, A) \vee (\exists x.\, B)}\,\supset I^1$$

Si consideri la teoria dell'aritmetica. Sia A la formula che afferma "x è primo" e sia B il falso. Chiaramente A è vera per $x = 5$, quindi il conseguente è vero. Ma l'antecedente equivale al falso, quindi l'implicazione inversa è falsa.

(2) Dimostrare che nel λ-calcolo, per ogni termine B esiste un termine A tale che $A =_\beta B[A/x]$.

Sia $A = \mathsf{Y}\,(\lambda x.\, B)$. Per il teorema di punto fisso 14.12 di Alan Turing, vale che $A = \mathsf{Y}\,(\lambda x.\, B) =_\beta (\lambda x.\, B)\,(\mathsf{Y}\,(\lambda x.\, B)) = (\lambda x.\, B)\,A =_\beta B[A/x]$.