ESAME DI LOGICA

17 GENNAIO 2023

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Calcolare la forma normale disgiuntiva di $(x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2)$.
[Esempio 5.5]

$$\begin{aligned} & (x_1 \vee y_1) \wedge (x_2 \vee y_2) \\ = & ((x_1 \vee y_1) \wedge x_2) \vee ((x_1 \vee y_1) \wedge y_2) \\ = & (x_1 \wedge x_2) \vee (y_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_2) \end{aligned}$$

(2) Si mostri un esempio di insieme di clausole al primo ordine che sia refutabile con la risoluzione estesa ma non con la risoluzione semplice.
[Definizione 12.10]
Ad esempio, l'insieme di clausole

$$\{\{A(x), A(y)\}, \{\neg A(z), \neg A(w)\}\} \quad .$$

Infatti, unificando le due clausole con $x = z = y = w$, si ottiene la clausola vuota. Nella risoluzione semplice, in qualsiasi modo si effettui la risoluzione, si ottiene una clausola con due letterali, senza quindi mai poter ridurre il numero di letterali.

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Dimostrare il seguente teorema:

Esiste un combinatore $\mathbf{Y}$ tale che $\mathbf{Y}x =_\beta x(\mathbf{Y}x)$.

[Teorema 14.12]
Sia $U \equiv \lambda u, x. x(uux)$, e sia $\mathbf{Y} \equiv UU$. Allora $\mathbf{Y}x \equiv (\lambda u, x. x(uux))Ux \rhd_\beta (\lambda x. x(UUx))x \rhd_\beta x(UUx) \equiv x(\mathbf{Y}x)$.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$ in logica proposizionale classica.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\lor B]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[\neg A\land\neg B]^2}{\neg A}\,{\scriptstyle\land\mathrm{E}_1} \quad [A]^3}{\bot}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{E}} \quad \dfrac{\dfrac{[\neg A\land\neg B]^2}{\neg B}\,{\scriptstyle\land\mathrm{E}_2} \quad [B]^3}{\bot}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{E}}}{\bot}\,{\scriptstyle\lor\mathrm{E}^3}}{\neg(\neg A\land\neg B)}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{I}^2}}{A\lor B\supset\neg(\neg A\land\neg B)}\,{\scriptstyle\supset\mathrm{I}^1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\lor\neg A}\,{\scriptstyle\mathrm{lem}} \quad \dfrac{[A]^1}{A\lor B}\,{\scriptstyle\lor\mathrm{I}_1} \quad \dfrac{\dfrac{}{B\lor\neg B}\,{\scriptstyle\mathrm{lem}} \quad \dfrac{[B]^2}{A\lor B}\,{\scriptstyle\lor\mathrm{I}_2} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \quad [\neg B]^2}{\neg A\land\neg B}\,{\scriptstyle\land\mathrm{I}} \quad [\neg(\neg A\land\neg B)]^3}{\bot}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{E}}}{A\lor B}\,{\scriptstyle\bot\mathrm{E}}}{A\lor B}\,{\scriptstyle\lor\mathrm{E}^2}}{A\lor B}\,{\scriptstyle\lor\mathrm{E}^1}}{\neg(\neg A\land\neg B)\supset A\lor B}\,{\scriptstyle\supset\mathrm{I}^3}$$

(2) Il costrutto, presente in molti linguaggi di programmazione funzionale,

$$\mathsf{let}\ x = V\ \mathsf{in}\ B$$

assegna alla variabile x il valore del λ-termine V e poi computa la forma normale di B in cui può comparire libera la variabile x avente il valore di V. Si implementi questo costrutto in λ-calcolo.

L'assegnamento $x = V$ definisce una sostituzione che sostituisce V alla variabile x nel corpo B del costrutto. Pertanto, vi sono due modi equivalenti di definire il costrutto:

$$(\mathsf{let}\ x = V\ \mathsf{in}\ B) \equiv B[V/x] =_\beta (\lambda x.\, B)\, V$$

dove la seconda forma, nell'ipotesi che gli argomenti siano valutati prima dell'intera espressione, valuta V una sola volta.