ESAME DI LOGICA

4 SETTEMBRE 2022

Nome e Cognome: Matricola:

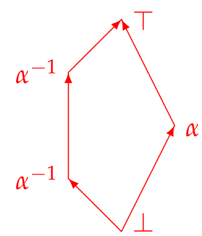
Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Mostrare che in un reticolo complementato, il complemento non è necessariamente unico.

[Slide dopo la Definizione 6.7]

Si consideri l'elemento α nel seguente reticolo:



Entrambi gli elementi marcati come α^{-1} soddisfano la definizione di complemento di α.

(2) Si definisca la rappresentazione nel λ-calcolo della struttura dati dei Booleani:

$$\mathsf{Bool} = \langle \{ \mathsf{bool} \}, \{ \mathsf{true}\colon \mathsf{bool}, \mathsf{false}\colon \mathsf{bool} \} \rangle$$

e si mostri il corrispondente selettore.

La rappresentazione è

$$\mathsf{true} \equiv \lambda x, y.\, x \qquad\qquad \mathsf{false} \equiv \lambda x, y.\, y$$

Il selettore è

$$\mathsf{If} \equiv \lambda p, x, y.\, p\, x\, y$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> Fissiamo un linguaggio al prim'ordine con una sola sorta. Se un insieme di formule chiuse S ha modelli finiti arbitrariamente grandi, allora ha anche un modello infinito.

[Enunciato 20.5]

Definiamo $\tau_n = \exists x_1, \dots, x_n. \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$. Chiaramente, τ_n vale in ogni modello il cui universo contenga almeno n elementi distinti.

Consideriamo un sottoinsieme finito $F \subseteq S \cup \{\tau_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Sia $K = F \cap \{\tau_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Poiché F è finito, K è finito, quindi $m = \max\{n \colon \tau_n \in K\}$ è definito (se $K = \emptyset$, fissiamo $m = 0$). Pertanto, dato che S ha modelli finiti arbitrariamente grandi per ipotesi, F deve avere un modello finito più grande di m.

Quindi, per il Teorema di Compattezza, $S \cup \{\tau_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ ha un modello $\mathcal{M}$. Poiché τ_n deve valere per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}$ deve avere più di n elementi distinti nel suo universo per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi deve essere infinito.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash \neg A = \neg\neg\neg A$ in logica proposizionale intuizionista.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\neg A]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^3}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg\neg A}\,\supset\mathrm{I}^2}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg A}\,\neg\mathrm{I}^3}{\neg\neg\neg A \supset \neg A}\,\supset\mathrm{I}^1
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]^1 \quad [\neg A]^2}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg\neg\neg A}\,\supset\mathrm{I}^1}{\neg A \supset \neg\neg\neg A}\,\supset\mathrm{I}^2$$

(2) Si consideri la seguente regola d'inferenza

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}\,\bot_c$$

Si dimostri che il calcolo naturale proposizionale intuizionista con la regola $\bot_c$ equivale al calcolo naturale proposizionale classico .

Il calcolo classico permette di simulare la regola $\bot_c$: avendo una dimostrazione $\pi \colon \neg A \vdash \bot$ posso ottenere una prova di A scaricando $\neg A$

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\,\mathrm{lem} \qquad [A]^1 \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^1\\ \vdots\ \pi \\ \bot\end{matrix}}{A}\,\bot\mathrm{E}}{A}\,\vee\mathrm{E}^1$$

Il calcolo intuizionista con $\bot_c$ permette di dimostrare il terzo escluso: rammentando la legge di De Morgan $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$, si ottiene $\neg(A \vee \neg A) \supset \neg A \wedge \neg\neg A$ ponendo $B \equiv \neg A$, quindi per eliminazione dell'implicazione, $\pi\colon \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \wedge \neg\neg A$, da cui

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg(A \vee \neg A)]^1 \\ \vdots\ \pi \\ \neg A \wedge \neg\neg A\end{matrix}}{\neg A}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{E}_1} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg(A \vee \neg A)]^1 \\ \vdots\ \pi \\ \neg A \wedge \neg\neg A\end{matrix}}{\neg\neg A}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{E}_2}}{\bot}\,{\scriptstyle \neg \mathrm{E}}}{A \vee \neg A}\,\bot_c^1$$