ESAME DI LOGICA

5 LUGLIO 2022

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire l'operazione di sostituzione nelle formule nell'ambito della logica classica al primo ordine.

[Definizione 9.10 nelle slide]

Fissata una segnature e una formula A su di essa, la *sostituzione* della variabile $x\colon s$ con il termine $t\colon s$, che produce $A[t/x]$, è definita per induzione sulla struttura della formula A:

- se $A \equiv \top$ o $A \equiv \bot$, allora $A[t/x] = A$;
- se $A \equiv r(t_1, \ldots, t_n)$, allora $A[t/x] = r(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$;
- se $A \equiv \neg B$, allora $A[t/x] = \neg B[t/x]$;
- se $A \equiv B \wedge C$, $A \equiv B \vee C$, o $A \equiv B \supset C$, allora $A[t/x] = B[t/x] \wedge C[t/x]$, $A[t/x] = B[t/x] \vee C[t/x]$, o $A[t/x] = B[t/x] \supset C[t/x]$, rispettivamente;
- se $A \equiv \forall y\colon r.\, B$, o $A \equiv \exists y\colon r.\, B$, e $y\colon r \equiv x\colon s$, allora $A[t/x] = A$;
- se $A \equiv \forall y\colon r.\, B$, o $A \equiv \exists y\colon r.\, B$, e $y\colon r \not\equiv x\colon s$, allora $A[t/x] = \forall z\colon r.\, (B[z/y])[t/x]$, o $A[t/x] = \exists z\colon r.\, (B[z/y])[t/x]$, rispettivamente, dove $z\colon r \notin \mathsf{FV}(B) \cup \mathsf{FV}(t)$.

(2) Si descriva nel λ-calcolo la struttura dati delle sequenze.

$$\mathsf{nil} \equiv \lambda u, v.\, v$$
$$\mathsf{cons} \equiv \lambda x, y, u, v.\, u\, x\, (\mathsf{K}\, (y\, u\, v))$$

dove K è il combinatore $\lambda x, y.\, x$, che si assume venga ridotto solo quando è applicato a due termini.

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> Un insieme finito di clausole S è insoddisfacibile se e solo se $S \vdash_{\mathsf{res}} \bot$.

[Teorema 12.4]

Sia $S \vdash_{\mathsf{res}} \bot$. Supponiamo che S sia soddisfacibile. Quindi esiste una interpretazione $[\![\ ]\!]$ tale che $[\![S]\!] = 1$. Per induzione sulla dimostrazione e per l'Enunciato 12.3, è immediato concludere che $[\![\bot]\!] = 1$, impossibile. Pertanto, S deve essere insoddisfacibile.

Sia S insoddisfacibile. Per induzione su n, dimostriamo che se T è insoddisfacibile e contiene n variabili distinte, allora $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$:

- se $n = 0$, allora necessariamente $T = \{\bot\}$, in quanto $T = \emptyset$ è soddisfacibile da qualsiasi assegnamento. Quindi $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ in modo banale.
- se T contiene $n+1$ variabili, possiamo supporre senza ledere la generalità che nessuna clausola di T contenga un letterale e la sua negazione.

  Prendiamo una variabile x e costruiamo

  $$T_x = \{c \setminus \{x\} : c \in T \wedge \neg x \notin c\} \qquad T'_x = \{c : c \in T \wedge \neg x \notin c\}$$
  $$T_{\neg x} = \{c \setminus \{\neg x\} : c \in T \wedge x \notin c\} \qquad T'_{\neg x} = \{c : c \in T \wedge x \notin c\}$$

  T_x e $T_{\neg x}$ sono insoddisfacibili e contengono n variabili. Infatti, se T_x fosse soddisfatto da σ, allora σ estesa ad x ponendo $\sigma(x) = 0$ renderebbe vero T contro ipotesi. Analogamente per $T_{\neg x}$. Quindi, per ipotesi induttiva $T_x \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ e $T_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \bot$.

  Ripristinando la variabile x ove sia stata elisa, $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ oppure $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} x$, e $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ oppure $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \neg x$. Se $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ o $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \bot$, allora $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$, e abbiamo concluso. Altrimenti $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} x$ e $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \neg x$, quindi $T \vdash_{\mathsf{res}} x$ e $T \vdash_{\mathsf{res}} \neg x$. Quindi, con un passo di risoluzione, $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash A \supset B = \neg B \supset \neg A$ nella logica classica proposizionale.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \supset B]^1 \quad [A]^2}{B}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{E}} \qquad [\neg B]^3}{\bot}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg A}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}^2}}{\neg B \supset \neg A}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^3}}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vee \neg B}\,{\scriptstyle \mathrm{lem}} \qquad [B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B \supset \neg A]^2 \quad [\neg B]^1}{\neg A}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{E}} \qquad [A]^3}{\bot}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{B}\,{\scriptstyle \bot\mathrm{E}}}{B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E}^1}}{A \supset B}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^3}}{(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^2}$$

(2) Si consideri il termine $t \equiv \lambda x \colon A.\, \lambda y \colon B.\, x$ nella teoria dei tipi semplici. Si richiede (i) di calcolare il tipo del termine t, e (ii) di rappresentare il termine t come una prova in deduzione naturale usando l'isomorfismo di Curry-Howard.

La variabile x ha tipo A, come si legge nella prima astrazione nel termine t, quindi $\lambda y \colon B.\, x$ ha tipo $B \to A$, perciò t ha tipo $A \to (B \to A)$.

La prova in calcolo naturale corrispondente a t è:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1}{B \supset A}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}}}{A \supset (B \supset A)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}$$