ESAME DI LOGICA

15 GIUGNO 2023

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Mostrare con le tavole di verità che la negazione e l'implicazione sono definibili con il NAND.

[Lezione 4: ultima slide]

Il NAND è definito come

A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Definiamo $\neg A$ come A NAND A:

A	A NAND A	$\neg A$
0	1	1
1	0	0

Definiamo $A \supset B$ come A NAND $(B$ NAND $B)$

A	B	B NAND B	A NAND $(B$ NAND $B)$	$A \supset B$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

(2) In logica classica, per ogni formula atomica A, si dimostri che $\pi\colon\ \vdash A = (A)^N$ dove $(\_)^N$ è la traduzione di Gödel-Gentzen.

[Enunciato 18.3, secondo caso]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad [\neg A]^2}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg\neg A}\,\neg\mathrm{I}^2}{A \supset \neg\neg A}\,\supset\mathrm{I}^1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\,\mathrm{lem} \qquad [A]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]^2 \quad [\neg A]^1}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{A}\,\bot\mathrm{E}}{A}\,\vee\mathrm{E}^1}{\neg\neg A \supset A}\,\supset\mathrm{I}^2$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

Esiste un modello non standard dell'aritmetica.

[Enunciato 20.4]

Sia $S^0(0) = 0$, e $S^{i+1}(0) = S\,S^i(0)$. Sia $\Sigma_n = \{x \neq S^i(0) \colon i < n\}$ una collezione di formule per ogni $n \in \mathbb{N}$ con x una variabile fissata, e sia $\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$.

Detta $\mathcal{M}$ la struttura del modello standard,e definendo σ_n in modo tale che $\sigma_n(x) = n$, il modello standard $(\mathcal{M}, \sigma_n)$ rende vera Σ_n con tutte le formule chiuse vere nell'aritmetica.

Pertanto, ogni $\Xi \subset \Sigma$ finito ha un modello, essendo contenuto in Σ_n per qualche n. Quindi, per il Teorema di Compattezza, Σ ha un modello $(\mathcal{N}, \sigma)$ che rende vera anche la teoria dell'aritmetica.

In questo modello $\sigma(x) \neq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ poiché $[\![S^n(0)]\!]_{\mathcal{N}} = n$ ma $x \neq S^n(0)$ occorre in Σ, quindi, per definizione di interpretazione, $\sigma(x) \neq [\![S^n(0)]\!]_{\mathcal{N}}$. Quindi esiste un elemento $k \notin \mathbb{N}$ tale che $\sigma(x) = k$. Ma interpretando x su $\mathcal{M}$ ci porta a qualche $n \in \mathbb{N}$, qualsiasi valutazione delle variabili possiamo scegliere. Quindi, ogni funzione che mappi $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ deve essere non invertibile sul termine x.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash (\forall x.\, A) = \neg\exists x.\, \neg A$ nella logica classica al primo ordine.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x.\,\neg A]^1 \qquad \dfrac{[\neg A]^2 \qquad \dfrac{[\forall x.\,A]^3}{A}\,\forall\mathrm{E}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\dfrac{\bot}{\neg\exists x.\,\neg A}\,\neg\mathrm{I}^1}\,\exists\mathrm{E}^2}{(\forall x.\,A) \supset \neg\exists x.\,\neg A}\,\supset\mathrm{I}^3$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\,\mathrm{lem} \qquad [A]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(\exists x.\,\neg A)]^2 \qquad \dfrac{[\neg A]^1}{\exists x.\,\neg A}\,\exists\mathrm{I}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{A}\,\bot\mathrm{E}}{A}\,\vee\mathrm{E}^1}{\forall x.\,A}\,\forall\mathrm{I}}{\neg(\exists x.\,\neg A) \supset \forall x.\,A}\,\supset\mathrm{I}^2$$

(2) Si mostri un λ-termine che abbia una forma normale, ma non sia fortemente normalizzabile.

Si consideri $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega$ dove $\mathsf{K} \equiv \lambda x, y.\, x$ e $\Omega \equiv (\lambda x.\, x\, x)\,(\lambda x.\, x\, x)$.

Calcolando: $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega \equiv (\lambda x, y.\, x)\,\mathsf{K}\,\Omega \rhd_\beta \mathsf{K} \equiv \lambda x, y.\, x$ che è irriducibile, quindi una forma β-normale per definizione.

Ma anche $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega \equiv \mathsf{K}\,\mathsf{K}\,((\lambda x.\, x\, x)\,(\lambda x.\, x\, x)) \rhd_\beta \mathsf{K}\,\mathsf{K}\,((\lambda x.\, x\, x)\,(\lambda x.\, x\, x))$ in un passo. Quindi $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega$ riduce in un passo a sé stesso e iterando la medesima riduzione, questa è sempre estendibile. Pertanto il termine $\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,\Omega$ non è fortemente normalizzabile.