Testi del Syllabus

Resp. Did.	**BENINI MARCO**	**Matricola: 031722**
Docenti	**BENINI MARCO, 8 CFU** **BENINI MARCO, 8 CFU**	

Anno offerta:	**2022/2023**
Insegnamento:	**SCC0593 - MATHEMATICAL LOGIC**
Corso di studio:	**W006 - MATEMATICA**
Anno regolamento:	**2022**
CFU:	**8**
Settore:	**MAT/01**
Tipo Attività:	**B - Caratterizzante**
Anno corso:	**1**
Periodo:	**Secondo Semestre**

Testi in italiano

Lingua insegnamento	Inglese
Obiettivi formativi	Questo è un corso introduttivo alla Logica Matematica. Il corso mira a studiare il processo di dimostrazione, il nesso tra dimostrazione e verità, il concetto di costruzione e di costruzione calcolabile. Il corso mostra e discute i limiti della dimostrazione matematica come mezzo accedere alla verità. Al termine del corso ci si attende che lo studente abbia acquisito le seguenti abilità: 1. effettuare semplici dimostrazioni matematiche all’interno di un sistema formale tra quelli presentati (logica proposizionale classica e intuizionista, logica al primo ordine classica e intuizionista, lambda-calcolo e teoria dei tipi semplici). 2. effettuare dimostrazioni riguardanti un sistema formale tra quelli presentati (correttezza, completezza, sintesi di modelli non standard mediante compattezza). 3. vedere criticamente le nozioni fondamentali della matematica (molteplicità del concetto di insieme, molteplicità del concetto di numero, vero non coincidente con dimostrabile). 4. relazionare dimostrazioni e computazioni (interpretazione delle proposizioni come tipi nei sistemi intuizionisti, concetto di costruttività). 5. legare lo studio dei sistemi formali ad altri domini matematici (logica come studio dei fondamenti della matematica). E’ anche previsto che lo studio della logica conduca lo studente ad acquisire un vocabolario scientifico adeguato che gli consenta di rivedere criticamente le conoscenze già in suo possesso in ambito matematico, espandendo la coscienza di unità delle discipline matematiche.
Prerequisiti	Non sono previsti prerequisiti a parte il possesso delle conoscenze di base di una laurea triennale in ambito matematico: elementi basilari di aritmetica, analisi matematica e topologia elementare. E’ utile, ma non necessario, possedere rudimenti relativi alla programmazione di calcolatori.

Contenuti	1. introduzione: breve storia della logica; formalismo, sintassi, semantica, interpretazione intesa; una infinita varietà di logiche; questioni di fondamenti; correttezza, completezza. 2. logica proposizionale classica: sintassi, calcolo in deduzione naturale; semantica con tavole di verità e con algebre booleane; correttezza, completezza. 3. logica classica al primo ordine: sintassi, calcolo in deduzione naturale; semantica alla Tarski, correttezza, completezza; compattezza; cenni alla teoria dei modelli. 4. teoria degli insiemi di Zermelo-Frænkel: classi e insiemi; ordinali, cardinali e relative induzioni; l'assioma di scelta, l'ipotesi del continuo. 5. fondamenti di calcolabilità: funzioni calcolabili, funzioni primitive ricorsive, funzioni ricorsive parziali; teorema di enumerazione e funzione universale; punti fissi; λ-calcolo puro e funzioni rappresentabili; teoria dei tipi semplici e normalizzazione forte. 5. fondamenti di logica intuizionista: sintassi e potenza espressiva; semantica proposizionale algebrica; correttezza e completezza; proposizioni come tipi; normalizzazione. 5. risultati limitativi: teoremi di incompletezza di Gödel; incompletezza naturale (cenni).
Metodi didattici	Lezione frontale in lingua inglese con l'ausilio di slides e approfondimenti alla lavagna. Gli obiettivi didattici verranno raggiunti seguendo il seguente schema: 1. ognuno dei sette capitoli del corso viene introdotto da una discussione generale di inquadramento nelle discipline matematiche, con la spiegazione del senso filosofico della materia che si andrà ad affrontare. 2. verranno illustrate le definizioni e i teoremi fondamentali al fine di fornire l'impianto matematico in modo solido e ordinato. 3. esempi di utilizzo accompagneranno i risultati di particolare rilievo, sia per chiarirne il senso, sia per illustrarne l'applicazione. 4. le parti che necessitano (dimostrazioni formali) saranno compendiate da esercizi svolti in classe dal docente, con particolare enfasi sul metodo per la loro risoluzione. 5. al termine di ogni capitolo, si fornisce un sommario dei risultati ottenuti con lo scopo di fornire la prospettiva atta a inquadrarli criticamente sia rispetto al loro senso matematico, sia in relazione alle conoscenze acquisite in altri corsi. Data la duplice natura matematica e filosofica della disciplina, si consiglia agli studenti di partecipare alle lezioni, anche se la frequenza non è obbligatoria.
Modalità di verifica dell'apprendimento	L'esame è orale, con la scelta alternativa per i frequentanti di effettuare quattro prove scritte intermedie in aula in sostituzione dell'esame finale. Durante un esame orale verrà verificata - la capacità di effettuare una dimostrazione formale in uno dei sistemi logici presentati al corso: logica proposizionale classica e intuizionista, logica al primo ordine classica e intuizionista, λ-calcolo, teoria dei tipi semplici. - la conoscenza del contenuto del corso mediante l'enunciazione e la dimostrazione di alcuni teoremi tra quelli che sono stati illustrati a lezione. Il numero dei teoremi e la loro scelta vengono guidati dalla necessità di ricoprire i sette capitoli del programma. - la capacità di relazionare i concetti appresi a lezione con gli interessi matematici dello studente, mediante una domanda che richieda specificamente di usare i concetti del corso nell'ambito che lo studente predilige. Il voto sarà determinato dal grado di conoscenza e studio, dalla capacità manipolativa formale, e dalla abilità di porre in relazione i concetti base del corso con altri ambiti matematici. Le prove intermedie sono una opzione riservata agli studenti frequentanti.

Ogni prova è articolata su tre quesiti:
1. effettuare un esercizio di dimostrazione in un sistema formale (prove 1 e 2), oppure su di un sistema formale (prove 3 e 4).
2. enunciare e dimostrare un risultato tra quelli studiati a lezione nei capitoli corrispondenti (prova 1, capitolo 2 – prova 2, capitolo 3 – prova 3, capitoli 4 e 5 – prova 4, capitoli 6 e 7).
3. effettuare una dimostrazione o una costruzione non illustrata a lezione, che richieda l'uso dei concetti studiati.
La votazione di ciascuna sarà determinata in base alla correttezza dei primi due quesiti, e in base alla linea di ragionamento seguita nel terzo quesito.
La votazione finale sarà la media dei voti delle quattro prove intermedie.

Altre informazioni

Il sito web del corso è: https://marcobenini.me/lectures/mathematical-logic/
Il ricevimento studenti è su appuntamento da concordarsi via email.

Programma esteso

1. introduzione: breve storia della logica; formalismo, sintassi, semantica, interpretazione intesa; una infinita varietà di logiche; questioni di fondamenti; correttezza, completezza.
2. logica proposizionale classica: sintassi, calcolo in deduzione naturale; semantica con tavole di verità e con algebre booleane; correttezza, completezza.
3. logica classica al primo ordine: sintassi, calcolo in deduzione naturale; semantica alla Tarski, correttezza, completezza; compattezza; cenni alla teoria dei modelli.
4. teoria degli insiemi di Zermelo-Frænkel: classi e insiemi; ordinali, cardinali e relative induzioni; l'assioma di scelta, l'ipotesi del continuo.
5. fondamenti di calcolabilità: funzioni calcolabili, funzioni primitive ricorsive, funzioni ricorsive parziali; teorema di enumerazione e funzione universale; punti fissi; λ-calcolo puro e funzioni rappresentabili; teoria dei tipi semplici e normalizzazione forte.
5. fondamenti di logica intuizionista: sintassi e potenza espressiva; semantica proposizionale algebrica; correttezza e completezza; proposizioni come tipi; normalizzazione.
5. risultati limitativi: teoremi di incompletezza di Gödel; incompletezza naturale (cenni).

Obiettivi per lo sviluppo sostenibile

Codice	Descrizione

Testi in inglese

Teaching language

English

Learning outcomes

This is an introductory course in Mathematical Logic. The course aims at studying the proving process, the connection between proof and truth, the concept of construction and computable construction. The course shows and discusses the limits of mathematical proving as a way to access truth.

At the end of the course, a student is expected to acquire the following skills:
1. to prove simple statements in a formal system among the illustrated ones (propositional logic, both classical and intuitionistic, first-order logic, both classical and intuitionistic, lambda-calculus and the simple theory of types).
2. to prove properties of a formal system among the illustrated ones (soundness, completeness, synthesising non-standard models by compactness).

	3. to critically view the fundamentals concepts in mathematics (existence of multiple notions of set, existence of multiple notions of number, truth is not the same as provable). 4. to link proofs and computations (propositions as types interpretation, notion of being constructive). 5. to relate formal systems to other mathematical domains (Logic as a study of the foundations of mathematics). It is also foreseen that studying logic will lead the student to learn an adequate scientific terminology, allowing her to critically review the already acquired mathematical knowledge, and to extend her consciousness of unity of all the mathematical disciplines.
Prerequisites	There are no prerequisites except the basic knowledge provided by a mathematically oriented bachelor degree: fundamentals of arithmetic, mathematical analysis, and elementary topology. It is useful although not required, to know the basics of computer programming.
Course content	1. Introduction: a brief history of logic; formalism, syntax, semantics, intended interpretation; an infinite variety of logics; foundational issues; soundness, completeness. 2. Classical propositional logic: syntax, natural deduction; truth-table semantics and algebraic semantics; soundness, completeness. 3. Classical first-order logic: syntax, natural deduction; Tarski's semantics; soundness and completeness; compactness; hints on model theory. 4. Zermelo-Frænkel's set theory: classes and sets; ordinals, cardinals and their induction principles; the axiom of choice, the continuum hypothesis. 5. Fundamentals of computability: computable functions, primitive recursive functions, partial recursive functions; enumeration theorem and universal function; fixed points; pure λ-calculus and representable functions; simple theory of types and strong normalisation. 6. Fundamentals of intuitionistic logic: motivation; syntax and expressive power; propositional algebraic semantics; soundness and completeness; propositions as types; normalisation. 7. Limiting results: Gödel incompleteness theorems; hints on natural incompleteness results.
Mode of delivery	Conventional frontal lecture in English with slides and blackboard. The teaching objectives are pursued as follows: 1. each of the seven chapters of the course will be introduced by a general discussion to relate the topics to the other mathematical subjects, and to illustrate the philosophical meaning of what is going to be explained. 2. the fundamental definitions and theorems will be illustrated to provide a solid and well organised mathematical framework. 3. examples will complement the particularly relevant results, both to clarify their meaning, and to illustrate their applications. 4. the parts which need (the formal proofs) will be complemented with exercises to be solved in the classroom by the lecturer, with an emphasis on the techniques to solve them. 5. at the end of each chapter, a summary of what has been achieved is given, to provide the right perspective to critically evaluate the results, both with respect to their inner mathematical meaning, and with respect to what has been acquired in other courses. Because of the double nature, mathematical and philosophical of the subject, students are strongly encouraged to attend the lessons, even if not compulsory.
Assessment methods and criteria	The examination is oral, but frequenting students may opt to do four intermediate written assignments during the course to avoid the final examination. During the oral examination it will be verified that - the student is able to perform a formal proof in one of the logical systems illustrated during the course: propositional logic, classical and intuitionistic; first-order logic, classical and intuitionistic, λ-calculus,

	simple theory of types. - the student has acquired the knowledge presented during the course. This will be done by asking her to state and prove some theorems among the ones discussed in the lessons. The theorems will be chosen to cover all the seven chapters of the course. - the student has to show she is able to link the content of the course with her own mathematical interests by a question that allows to use the specific content of the course in a subject she likes. The marking will be given according to the degree of study and knowledge, to the formal manipulation ability, and to the capacity to link the fundamental concepts of the course to other mathematical subjects. The intermediate assignments are an option reserved to attending students. Every assignment is composed by three questions: 1. to formally prove an exercise in a formal system (assignments 1 and 2), or on a formal system (assignments 3 and 4). 2. to state and to prove a result among the ones studied during the lessons (assignment 1, chapter 2 – assignment 2, chapter 3 – assignment 3, chapters 4 and 5 – assignment 4, chapters 6 and 7). 3. to perform a proof or a construction non illustrated during the lessons, using the studied notions. The marking of every assignment will be given according to the degree of correctness of the first and second questions, and according to the effectiveness of the line of reasoning in the third questions. The final mark will the the average of the intermediate markings.
More Information	The website for the course is: https://marcobenini.me/lectures/mathematical-logic/ Students are received upon appointment to fix by email.
Detailed course content	1. Introduction: a brief history of logic; formalism, syntax, semantics, intended interpretation; an infinite variety of logics; foundational issues; soundness, completeness. 2. Classical propositional logic: syntax, natural deduction; truth-table semantics and algebraic semantics; soundness, completeness. 3. Classical first-order logic: syntax, natural deduction; Tarski's semantics; soundness and completeness; compactness; hints on model theory. 4. Zermelo-Frænkel's set theory: classes and sets; ordinals, cardinals and their induction principles; the axiom of choice, the continuum hypothesis. 5. Fundamentals of computability: computable functions, primitive recursive functions, partial recursive functions; enumeration theorem and universal function; fixed points; pure λ-calculus and representable functions; simple theory of types and strong normalisation. 6. Fundamentals of intuitionistic logic: motivation; syntax and expressive power; propositional algebraic semantics; soundness and completeness; propositions as types; normalisation. 7. Limiting results: Gödel incompleteness theorems; hints on natural incompleteness results.

Obiettivi per lo sviluppo sostenibile

Codice	Descrizione