ESAME DI LOGICA

17 FEBBRAIO 2023

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Enunciare il Teorema di Kruskal.

[Teorema 24.2]

Esiste un qualche $n \in \mathbb{N}$ tale che, se $T_1, \dots, T_n$ è una sequenza finita di alberi, dove T_k ha $k + n$ vertici, allora per qualche $i < j$, esiste una mappa iniettiva $f \colon T_i \to T_j$ tra i vertici che preserva i percorsi.

(2) Si definisca nel λ-calcolo il funzionale map tale che

$$\mathsf{map}\, f\, [x_1, \dots, x_n] = [f(x_1), \dots, f(x_n)] \ .$$

$$\begin{aligned} \mathsf{map}\, f\, [] &= [] \\ \mathsf{map}\, f\, (x :: xs) &= (f\, x) :: (\mathsf{map}\, f\, xs) \end{aligned}$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> In ogni reticolo distributivo e complementato, ogni elemento x ha un unico complemento, denotato da $\neg x$.

[Enunciato 6.13]

Supponiamo che l'elemento x abbia due complementi y e z. Allora, per definizione di complemento: $x \wedge y = \bot = x \wedge z$ e $x \vee y = \top = x \vee z$. Perciò

$$\begin{aligned} & y \\ &= y \wedge \top \\ &= y \wedge (x \vee z) \\ &= (y \wedge x) \vee (y \wedge z) \\ &= (z \wedge x) \vee (z \wedge y) \\ &= z \wedge (x \vee y) \\ &= z \wedge \top \\ &= z \ . \end{aligned}$$

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash A \vee \exists x.\, B = \exists x.\, A \vee B$ supponendo $x \notin \mathsf{FV}(A)$.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x.\, A \vee B]^1 \qquad \dfrac{[A \vee B]^2 \qquad \dfrac{[A]^3}{A \vee \exists x.\, B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}_1} \qquad \dfrac{\dfrac{[B]^3}{\exists x.\, B}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{E}}}{A \vee \exists x.\, B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}_2}}{A \vee \exists x.\, B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E}^3}}{A \vee \exists x.\, B}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{E}^2}}{(\exists x.\, A \vee B) \supset A \vee \exists x.\, B}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}$$

$$\dfrac{\dfrac{[A \vee \exists x.\, B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}_1}}{\exists x.\, A \vee B}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{I}} \qquad \dfrac{[\exists x.\, B]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[B]^3}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}_2}}{\exists x.\, A \vee B}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{I}}}{\exists x.\, A \vee B}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{E}^3}}{\exists x.\, A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E}^2}}{A \vee (\exists x.\, B) \supset \exists x.\, A \vee B}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}$$

(2) Nel λ-calcolo, sia $V \equiv \lambda y.\, x\,(y\,y)$ e sia $R \equiv \lambda x.\, V\,V$. Dimostrare che $R\,z =_\beta z\,(R\,z)$.

Calcolando:

$$R\,z =_\beta (\lambda y.\, z\,(y\,y))\, V[z/x] =_\beta z\,(V[z/x]\, V[z/x])\ .$$

Nell'altro verso:

$$z\,(R\,z) = z\,((\lambda x.\, V\,V)\,z) =_\beta z\,(V[z/x]\, V[z/x])\ .$$

Quindi $R\,z =_\beta z\,(R\,z)$ in quanto sono β-equivalenti allo stesso termine.