# ESAME DI LOGICA

27 GENNAIO 2023

Nome e Cognome: Matricola:

## Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Dimostrare che in un reticolo limitato $\langle S; \leq \rangle$, ogni elemento è maggiore di $\perp$ e minore di $\top$.
[Enunciato 6.5]
Per dualità, è sufficiente provare solo una metà dell'enunciato.
Poiché $\top = \bigwedge \emptyset$, per definizione di meet, per ogni $x \in \emptyset$, $\top \leq x$, e per ogni $y \in S$ tale che per ogni $x \in \emptyset$, $y \leq x$, vale che $y \leq \top$. Ma non esistono elementi in $\emptyset$, per cui $y \leq \top$ per ogni $y \in S$.

(2) Definire nel $\lambda$-calcolo la funzione $\mathsf{take}\, L\, n$ il cui valore sia la lista dei primi $n$ elementi della lista $L$.

$$\mathsf{take}\, []\, i = []$$
$$\mathsf{take}\, (x :: xs)\, i = \mathsf{if}\ i > 0\ \mathsf{then}\ x :: (\mathsf{take}\, xs\, (i-1))\ \mathsf{else}\ []$$

## Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Enunciare e dimostrare il Primo Teorema di Incompletezza di Gödel. Si presuma di avere già definito la codifica $g$ e di aver già dimostrato il Lemma di Punto Fisso.
[Teorema 22.3]

Sia $T$ una teoria effettiva che sia consistente e in grado di rappresentare le funzioni calcolabili. Allora, esiste una formula chiusa $G$ tale che $T \nvdash G$ e $T \nvdash \neg G$.

*Proof.* Consideriamo la formula $\neg T[x/y]$: applicando il Lemma di Punto Fisso, esiste $G$ tale che $\mathsf{FV}(G) = \emptyset$ e $\vdash G = \neg T[\ulcorner G \urcorner / y]$.

Assumiamo che vi sia $\pi\colon\ \vdash G$. Allora $\vdash \neg T[\ulcorner G \urcorner / y]$. Ma, poiché $\pi\colon\ \vdash G$, vale che $\vdash \mathcal{D}[\ulcorner \pi \urcorner / x, \ulcorner G \urcorner / y]$, e quindi $\vdash \exists x.\, \mathcal{D}[\ulcorner G \urcorner / y]$, ovvero $\vdash T[\ulcorner G \urcorner / y]$, rendendo la teoria non consistente. Quindi $\nvdash G$.

D'altro canto, supponiamo esista $\pi\colon\ \vdash \neg G$. Allora $\vdash T[\ulcorner G \urcorner / y]$ per definizione di $G$, quindi $\vdash \exists x.\, \mathcal{D}[\ulcorner G \urcorner / y]$. Ma questo implica che esiste $\theta\colon\ \vdash G$ con $x = \ulcorner \theta \urcorner$. Quindi, di nuovo, otteniamo una contraddizione. Pertanto $\nvdash \neg G$. $\square$

## Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash A \land \forall x.\, B = \forall x.\, A \land B$ dove $x \notin \mathsf{FV}(A)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land \forall x.\, B]^1}{A}\,{\land}\mathrm{E}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{[A \land \forall x.\, B]^1}{\forall x.\, B}\,{\land}\mathrm{E}_2}{B}\,\forall\mathrm{E}}{A \land B}\,{\land}\mathrm{I}}{\forall x.\, A \land B}\,\forall\mathrm{I}}{A \land (\forall x.\, B) \supset \forall x.\, A \land B}\,{\supset}\mathrm{I}^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.\, A \land B]^1}{A \land B}\,\forall\mathrm{E}}{A}\,{\land}\mathrm{E}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.\, A \land B]^1}{A \land B}\,\forall\mathrm{E}}{B}\,{\land}\mathrm{E}_2}{\forall x.\, B}\,\forall\mathrm{I}}{A \land \forall x.\, B}\,{\land}\mathrm{I}}{(\forall x.\, A \land B) \supset A \land \forall x.\, B}\,{\supset}\mathrm{I}^1$$

Nell'aritmetica si ponga $A \equiv (\exists y.\, x = 2y)$, e $B \equiv \top$, e si interpreti $x$ in 2. Poiché $A$ è vera in questa interpretazione, anche $A \land \forall x.\, B$ è vera. Invece $\forall x.\, A \land B$ è falsa, in quanto esiste un numero dispari, fornendo il controesempio richiesto.

(2) Dimostrare che nel $\lambda$-calcolo, per ogni termine $B$ esiste un termine $A$ tale che $A =_\beta B[A/x]$.

Sia $A = \mathsf{Y}\,(\lambda x.\, B)$. Per il teorema di punto fisso 14.12 di Alan Turing, vale che $A = \mathsf{Y}\,(\lambda x.\, B) =_\beta (\lambda x.\, B)\,(\mathsf{Y}\,(\lambda x.\, B)) = (\lambda x.\, B)\, A =_\beta B[A/x]$.