ESAME DI LOGICA

2 SETTEMBRE 2022

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire il concetto di termine nella teoria dei tipi semplici.
[Definizione 17.2]
Fissata una famiglia $\{V_\alpha\}_\alpha$ di *variabili*, disgiunta dall'insieme delle variabili per tipo, indicizzata dalla collezione dei tipi, tale che, per ogni α, V_α è numerabile e tale che $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ ogniqualvolta $\alpha \neq \beta$, un *termine* $t\colon \alpha$ di tipo α, assieme all'insieme delle sue *variabili libere*, è induttivamente definito come:
- se $x \in V_\alpha$ per qualche tipo α, $x\colon \alpha$ è un termine, e $\mathsf{FV}(x\colon \alpha) = \{x\colon \alpha\}$;
- $*\colon 1$ è un termine e $\mathsf{FV}(*\colon 1) = \emptyset$;
- per ogni tipo α, $\Box_\alpha\colon 0 \to \alpha$ è un termine e $\mathsf{FV}(\Box_\alpha\colon 0 \to \alpha) = \emptyset$;
- se $A\colon \alpha$ e $B\colon \beta$ sono termini, allora $\langle A, B\rangle\colon \alpha \times \beta$ è un termine e $\mathsf{FV}(\langle A, B\rangle\colon \alpha \times \beta) = \mathsf{FV}(A\colon \alpha) \cup \mathsf{FV}(B\colon \beta)$;
- se $A\colon \alpha \times \beta$ è un termine, anche $\pi_1 A\colon \alpha$ e $\pi_2 A\colon \beta$ sono termini, e $\mathsf{FV}(\pi_1 A\colon \alpha) = \mathsf{FV}(\pi_2 A\colon \beta) = \mathsf{FV}(A\colon \alpha \times \beta)$;
- se $A\colon \alpha$ è un termine allora, per ogni tipo β, $i_1^\beta A\colon \alpha + \beta$ e $i_2^\beta A\colon \beta + \alpha$ sono termini e $\mathsf{FV}(i_1^\beta A\colon \alpha + \beta) = \mathsf{FV}(i_2^\beta A\colon \beta + \alpha) = \mathsf{FV}(A\colon \alpha)$;
- se $C\colon \alpha + \beta$, $A\colon \alpha \to \gamma$ e $B\colon \beta \to \gamma$ sono termini, anche $\delta(C, A, B)\colon \gamma$ è un termine, e $\mathsf{FV}(\delta(C, A, B)\colon \gamma) = \mathsf{FV}(C\colon \alpha + \beta) \cup \mathsf{FV}(A\colon \alpha \to \gamma) \cup \mathsf{FV}(B\colon \beta \to \gamma)$;
- se $A\colon \beta$ è un termine e $x \in V_\alpha$, allora $\lambda x\colon \alpha.\, A\colon \alpha \to \beta$ è un termine e $\mathsf{FV}(\lambda x\colon \alpha.\, A\colon \alpha \to \beta) = \mathsf{FV}(A\colon \beta) \setminus \{x\colon \alpha\}$;
- se $A\colon \alpha$ e $B\colon \alpha \to \beta$ sono termini, allora $B \cdot A\colon \beta$ è un termine e $\mathsf{FV}(B \cdot A\colon \beta) = \mathsf{FV}(A\colon \alpha) \cup \mathsf{FV}(B\colon \alpha \to \beta)$.

(2) Si definisca la rappresentazione nel λ-calcolo della struttura dati del prodotto cartesiano di due elementi:

$$A \times B = \langle \{A, B, P\}; \{\mathsf{pair}\colon A \times B \to T\}\rangle$$

$$\mathsf{pair} \equiv \lambda x, y, u.\, u\, x\, y$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> Fissiamo un linguaggio al prim'ordine con una sola sorta. Se un insieme di formule chiuse S ha modelli finiti arbitrariamente grandi, allora ha anche un modello infinito.

[Enunciato 20.5]

Definiamo $\tau_n = \exists x_1, \ldots, x_n.\ \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$. Chiaramente, τ_n vale in ogni modello il cui universo contenga almeno n elementi distinti.

Consideriamo un sottoinsieme finito $F \subseteq S \cup \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sia $K = F \cap \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$. Poiché F è finito, K è finito, quindi $m = \max\{n : \tau_n \in K\}$ è definito (se $K = \emptyset$, fissiamo $m = 0$). Pertanto, dato che S ha modelli finiti arbitrariamente grandi per ipotesi, F deve avere un modello finito più grande di m.

Quindi, per il Teorema di Compattezza, $S \cup \{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ ha un modello $\mathcal{M}$. Poiché τ_n deve valere per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}$ deve avere più di n elementi distinti nel suo universo per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi deve essere infinito.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash A \land \exists x.\, B = \exists x.\, A \land B$ con $x \notin \mathsf{FV}(A)$. Si mostri mediante un controesempio che la formula è falsa quando $x \in \mathsf{FV}(A)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land \exists x.\, B]^1}{\exists x.\, B}\,{\scriptstyle \land E_2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \land \exists x.\, B]^1}{A}\,{\scriptstyle \land E_1} \quad [B]^2}{A \land B}\,{\scriptstyle \land I}}{\exists x.\, A \land B}\,{\scriptstyle \exists I}}{\exists x.\, A \land B}\,{\scriptstyle \exists E^2}}{A \land (\exists x.\, B) \supset \exists x.\, A \land B}\,{\scriptstyle \supset I^1}
\qquad
\dfrac{\dfrac{[\exists x.\, A \land B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[A \land B]^2}{A}\,{\scriptstyle \land E_1} \quad \dfrac{\dfrac{[A \land B]^2}{B}\,{\scriptstyle \land E_2}}{\exists x.\, B}\,{\scriptstyle \exists I}}{A \land \exists x.\, B}\,{\scriptstyle \land I}}{A \land \exists x.\, B}\,{\scriptstyle \exists E^2}}{(\exists x.\, A \land B) \supset A \land \exists x.\, B}\,{\scriptstyle \supset I^1}$$

Se $x \in \mathsf{FV}(A)$, si consideri di interpretare la formula nell'aritmetica e la variabile x in 3. Sia $A \equiv B \equiv \exists y.\, x = 2y$, "$x$ è pari". Chiaramente $A \land \exists x.\, B$ è falsa in quanto A è falsa, mentre $\exists x.\, A \land B$ è vera per x pari a 0.

(2) Esiste un λ-termine A tale che $\mathsf{K}\, A =_\beta A$? Motivare la risposta.

Per il Teorema 14.12 (punto fisso dovuto ad Alan Turing) c'è un combinatore Y tale che $\mathsf{Y}\, x =_\beta x\, (\mathsf{Y}\, x)$. Per $x = \mathsf{K}$ esso si specializza a $\mathsf{Y}\, \mathsf{K} =_\beta \mathsf{K}\, (\mathsf{Y}\, \mathsf{K})$, quindi ponendo $A = \mathsf{Y}\, \mathsf{K}$ si ottiene un λ-termine che soddisfa la proprietà richiesta.