ESAME DI LOGICA

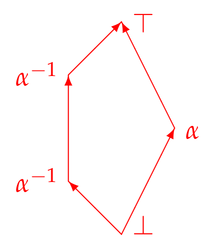
22 LUGLIO 2022

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Mostrare che in un reticolo complementato, il complemento non è necessariamente unico.
[Slide 142]
Si consideri l'elemento α nel seguente reticolo:



(2) Si descriva nel λ-calcolo la struttura dati delle sequenze.

$$\mathsf{nil} \equiv \lambda u, v.\, v$$
$$\mathsf{cons} \equiv \lambda x, y, u, v.\, u\, x\, (\mathsf{K}\, (y\, u\, v))$$

dove K è il combinatore $\lambda x, y.\, x$, che si assume venga ridotto solo quando è applicato a due termini.

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

Esiste un combinatore Y tale che $\mathsf{Y}\, x =_\beta x\, (\mathsf{Y}\, x)$.

[Teorema 14.12]
Sia $\mathsf{U} \equiv \lambda u, x.\, x\, (u\, u\, x)$, e sia $\mathsf{Y} \equiv \mathsf{U}\, \mathsf{U}$.
Allora $\mathsf{Y}\, x \equiv (\lambda u, x.\, x\, (u\, u\, x))\, \mathsf{U}\, x \triangleright_\beta (\lambda x.\, x\, (\mathsf{U}\, \mathsf{U}\, x))\, x \triangleright_\beta x\, (\mathsf{U}\, \mathsf{U}\, x) \equiv x\, (\mathsf{Y}\, x)$.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash A \wedge B \supset \neg(A \supset \neg B)$. Vale anche l'implicazione opposta? Si giustifichi la risposta.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \supset \neg B]^1 \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{A}{\scriptstyle \wedge E_1}}{\neg B}{\scriptstyle \supset E} \qquad \dfrac{[A \wedge B]^2}{B}{\scriptstyle \wedge E_2}}{\bot}{\scriptstyle \neg E}}{\neg(A \supset \neg B)}{\scriptstyle \neg I^1}}{A \wedge B \supset \neg(A \supset \neg B)}{\scriptstyle \supset I^2}
$$

Si consideri $\neg(A \supset \neg B) \supset A \wedge B$. Essa è vera in quanto, secondo la semantica a tavole di verità, $A \supset \neg B$ è vera quando A è falsa oppure $\neg B$ è vera, ovvero quando A oppure B sia falsa. Quindi $\neg(A \supset \neg B)$ è vera quando sia A che B sono vere, come da semantica della congiunzione.

(2) Si dimostri che $\lambda x.\, \mathsf{K}\, x$ è fortemente normalizzabile, ma esistono due λ-termini A e B tali che $(\lambda x.\, \mathsf{K}\, x)\, A\, B$ non è fortemente normalizzabile.

Calcolando: $\lambda x.\, \mathsf{K}\, x = \lambda x.\, (\lambda y, z.\, y)\, x \rhd_\beta \lambda x, z.\, x = \mathsf{K}$ il quale è irriducibile e quindi fortemente normalizzabile. Osserviamo che il termine $\lambda x.\, \mathsf{K}\, x$ ammette solo una η-riduzione con risultato K oltre a quella effettuata, pertanto anch'esso è fortemente normalizzabile.

Poniamo $A = \Omega$ e $B = \mathsf{K}$. Allora $(\lambda x.\, \mathsf{K}\, x)\, A\, B \rhd_\beta \mathsf{K}\, A\, B \rhd_\beta A = \Omega$ che riduce in un passo a sé stesso, dando luogo ad una sequenza di riduzioni sempre estendibile. Quindi $(\lambda x.\, \mathsf{K}\, x)\, A\, B$ non è fortemente normalizzabile.