ESAME DI LOGICA

1 LUGLIO 2022

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire l'algebra Booleana canonica per una teoria T proposizionale.

[Definizione 8.1]

Sia T una teoria. L'*algebra Booleana canonica* $\mathbb{B}(T)$ su T è la coppia formata dall'insieme $\{A : A$ è una formula nel linguaggio di $T\} / \sim$ e dalla relazione $\leq_{\mathbb{B}(\mathbb{T})}$, dove

- $A \sim B$ se e solo se $A \vdash_T B$ e $B \vdash_T A$,
- $[A]_\sim \leq_{\mathbb{B}(\mathbb{T})} [B]_\sim$ esattamente quando $A \vdash_T B$.

(2) Si rappresenti nel λ-calcolo la struttura dati degli alberi binari:

$$\mathsf{BinaryTree}(A) = \langle \{A, T\}; \{\mathsf{leaf} : A \to T; \mathsf{node} : A \times T \times T \to T\} \rangle$$

$$\mathsf{leaf} \equiv \lambda x, u, v.\, u\, x$$
$$\mathsf{node} \equiv \lambda x, y, z, u, v.\, v\, x\, (y\, u\, v)\, (z\, u\, v)$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

Esiste un modello non standard dell'aritmetica.

[Teorema 20.4]

Sia $\Sigma_n = \{x \neq S^i(0) : i < n\}$ una collezione di formule per ogni $n \in \mathbb{N}$ con x una variabile fissata, e sia $\Sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$.

Detta $\mathcal{M}$ la struttura del modello standard, e definendo σ_n in modo tale che $\sigma_n(x) = n$, il modello standard $(\mathcal{M}, \sigma_n)$ rende vera Σ_n con tutti gli assiomi dell'aritmetica.

Pertanto, ogni $\Xi \subset \Sigma$ finito ha un modello, essendo contenuto in Σ_n per qualche n. Quindi, per il Teorema di Compattezza, Σ ha un modello $(\mathcal{N}, \sigma)$ che rende vera anche la teoria dell'aritmetica.

In questo modello $\sigma(x) \neq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ poiché $x \neq S^n(0)$ occorre in Σ, quindi, per definizione di interpretazione, $\sigma(x) \neq [\![S^n(0)]\!]_{\mathcal{N}}$.

Ma interpretando x su $\mathcal{M}$ ci porta a qualche $n \in \mathbb{N}$, qualsiasi valutazione delle variabili possiamo scegliere. Quindi, ogni funzione che mappi $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ deve essere non invertibile sul termine x.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash (\forall x.\, A \supset B) = (\exists x.\, A) \supset B$ dove $x \notin \mathsf{FV}(B)$. Si mostri mediante un controesempio che la formula è falsa quando $x \in \mathsf{FV}(B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x.\, A]^1 \qquad \dfrac{[A]^2 \qquad \dfrac{[\forall x.\, A \supset B]^3}{A \supset B}\,{\scriptstyle \forall\mathrm{E}}}{B}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{E}}}{B}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{E}^2}}{(\exists x.\, A) \supset B}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}}{(\forall x.\, A \supset B) \supset ((\exists x.\, A) \supset B)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^3} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{\exists x.\, A}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{I}} \qquad [(\exists x.\, A) \supset B]^2}{B}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{E}}}{A \supset B}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}}{\forall x.\, A \supset B}\,{\scriptstyle \forall\mathrm{I}}}{((\exists x.\, A) \supset B) \supset (\forall x.\, A \supset B)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^2}$$

Rispetto al controesempio richiesto, si consideri l'aritmetica con x interpretata in 3. Si ponga $A \equiv B \equiv (\exists y.\, x = 2y)$, ovvero "$x$ è pari". Quindi $\forall x.\, A \supset B$ è sempre vera, $\exists x.\, A$ è vera ma B è falsa, pertanto anche $(\exists x.\, A) \supset B$ è falsa.

(2) Si dimostri che $\mathsf{K}\,\mathsf{S}\,\Omega$ possiede una forma β-normale ma non è fortemente normalizzabile. Ricordiamo che i combinatori K, S e Ω sono tra quelli definiti a lezione.

Calcolando: $\mathsf{K}\,\mathsf{S}\,\Omega \equiv (\lambda x, y.\, x)\,\mathsf{S}\,\Omega \rhd_\beta \mathsf{S} \equiv (\lambda x, y, z.\, (x\,z)\,(y\,z))$ che è irriducibile, quindi una forma β-normale per definizione.

Ma anche $\mathsf{K}\,\mathsf{S}\,\Omega \equiv \mathsf{K}\,\mathsf{S}\,((\lambda x.\, x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x)) \rhd_\beta \mathsf{K}\,\mathsf{S}\,((\lambda x.\, x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x))$ in un passo. Quindi $\mathsf{K}\,\mathsf{S}\,\Omega$ riduce in un passo a sé stesso e iterando la medesima riduzione, questa è sempre estendibile. Pertanto il termine $\mathsf{K}\,\mathsf{S}\,\Omega$ non è fortemente normalizzabile.