ESAME DI LOGICA

10 GIUGNO 2022

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definite cosa si intende per clausola di Horn.
[Definizione 5.9]
Una clausola (disgiunzione di letterali) è detta di *Horn* se essa contiene al massimo un letterale che non sia una negazione.

(2) Si rappresenti nel λ-calcolo la struttura dati delle liste:

$$\mathsf{List}(A) = \langle \{A, L\}; \{\mathsf{cons}\colon A \times L \to L, \mathsf{nil}\colon L\} \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathsf{nil} &\equiv \lambda u, v.\, v \\ \mathsf{cons} &\equiv \lambda x, y, u, v.\, u\, x\, (y\, u\, v) \end{aligned}$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

In qualsiasi reticolo distributivo, per ogni x, y e z,

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \ .$$

[Enunciato 6.12]

$$\begin{aligned} & (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ = {} & ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{distributività} \\ = {} & (x \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{distributività due volte} \\ = {} & x \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{idempotenza} \\ = {} & x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{assorbimento} \\ = {} & x \vee (y \wedge z) && \text{assorbimento} \end{aligned}$$

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash (\forall x.\, B \supset A) = B \supset \forall x.\, A$ dove $x \notin \mathsf{FV}(B)$. Si mostri con un controesempio che la formula è falsa se $x \in \mathsf{FV}(B)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^1 \qquad \dfrac{[\forall x.\, B \supset A]^2}{B \supset A}\,\forall\mathrm{E}}{A}\,{\supset}\mathrm{E}}{\forall x.\, A}\,\forall\mathrm{I}}{B \supset \forall x.\, A}\,{\supset}\mathrm{I}^1}{(\forall x.\, B \supset A) \supset (B \supset \forall x.\, A)}\,{\supset}\mathrm{I}^2
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \supset \forall x.\, A]^1 \quad [B]^2}{\forall x.\, A}\,{\supset}\mathrm{E}}{A}\,\forall\mathrm{E}}{B \supset A}\,{\supset}\mathrm{I}^2}{\forall x.\, B \supset A}\,\forall\mathrm{I}}{(B \supset \forall x.\, A) \supset (\forall x.\, B \supset A)}\,{\supset}\mathrm{I}^1
$$

Riguardo al controesempio, nell'aritmetica, sia $A \equiv B \equiv (\exists y.\, x = 2y)$, ovvero "$x$ è pari", e sia x interpretata in 2. Allora $\forall x.\, B \supset A$ viene interpretata in vero, mentre $B \supset \forall x.\, A$ è falsa.

(2) Si dimostri che $\mathsf{S}\,\mathsf{K}\,\mathsf{S}\,A =_\beta \mathsf{S}\,\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,A$ per ogni λ-termine A, dove S e K sono i combinatori visti a lezione.

Calcolando:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{S}\,\mathsf{K}\,\mathsf{S}\,A \\
=\ & (\lambda x, y, z.\, (x\,z)\,(y\,z))\,\mathsf{K}\,\mathsf{S}\,A \\
\rhd_\beta\ & (\mathsf{K}\,A)\,(\mathsf{S}\,A) \\
=\ & (\lambda x, y.\, x)\,A\,(\mathsf{S}\,A) \\
\rhd_\beta\ & A
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{S}\,\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,A \\
=\ & (\lambda x, y, z.\, (x\,z)\,(y\,z))\,\mathsf{K}\,\mathsf{K}\,A \\
\rhd_\beta\ & (\mathsf{K}\,A)\,(\mathsf{K}\,A) \\
=\ & (\lambda x, y.\, x)\,A\,(\mathsf{K}\,A) \\
\rhd_\beta\ & A
\end{aligned}
$$