ESAME DI LOGICA

18 FEBBRAIO 2022

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire la collezione dei termini nella teoria dei tipi semplici.

[Definizione 18.2, slide 357 e 358]

Fissata una famiglia $\{V_\alpha\}_\alpha$ di *variabili*, indicizzata dalla collezione dei tipi, tale che, per ogni α, V_α è numerabile è distinta dall'insieme delle variabili per tipo, e tale che $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ ogniqualvolta $\alpha \neq \beta$, un *termine* $t\colon \alpha$ di tipo α, assieme all'insieme delle sue *variabili libere*, è induttivamente definito come:

- se $x \in V_\alpha$ per qualche tipo α, $x\colon \alpha$ è un termine, e $\mathsf{FV}(x\colon \alpha) = \{x\colon \alpha\}$;
- $*\colon 1$ è un termine e $\mathsf{FV}(*\colon 1) = \emptyset$;
- per ogni tipo α, $\Box_\alpha\colon 0 \to \alpha$ è un termine e $FV(\Box_\alpha\colon 0 \to \alpha) = \emptyset$;
- se $A\colon \alpha$ e $B\colon \beta$ sono termini, allora $\langle A, B\rangle\colon \alpha \times \beta$ è un termine e $\mathsf{FV}(\langle A, B\rangle\colon \alpha \times \beta) = \mathsf{FV}(A\colon \alpha) \cup \mathsf{FV}(B\colon \beta)$;
- se $A\colon \alpha \times \beta$ è un termine, anche $\pi_1 A\colon \alpha$ e $\pi_2 A\colon \beta$ sono termini, e $\mathsf{FV}(\pi_1 A\colon \alpha) = \mathsf{FV}(\pi_2 A\colon \beta) = \mathsf{FV}(A\colon \alpha \times B)$;
- se $A\colon \alpha$ è un termine allora, per ogni tipo β, $i_1^\beta A\colon \alpha + \beta$ e $i_2^\beta A\colon \beta + \alpha$ sono termini e $\mathsf{FV}(i_1^\beta A\colon \alpha + \beta) = \mathsf{FV}(i_2^\beta A\colon \beta + \alpha) = \mathsf{FV}(A\colon \alpha)$;
- se $C\colon \alpha + \beta$, $A\colon \alpha \to \gamma$ e $B\colon \beta \to \gamma$ sono termini, anche $\delta(C, A, B)\colon \gamma$ è un termine, e $\mathsf{FV}(\delta(C, A, B)\colon \gamma) = \mathsf{FV}(C\colon \alpha + \beta) \cup \mathsf{FV}(A\colon \alpha \to \gamma) \cup \mathsf{FV}(B\colon \beta \to \gamma)$;
- se $A\colon \beta$ è un termine e $x \in V_\alpha$, allora $\lambda x\colon \alpha.\, A\colon \alpha \to \beta$ è un termine e $\mathsf{FV}(\lambda x\colon \alpha.\, A\colon \alpha \to \beta) = FV(A\colon \beta) \setminus \{x\colon \alpha\}$;
- se $A\colon \alpha$ e $B\colon \alpha \to \beta$ sono termini, allora $B \cdot A\colon \beta$ è un termine e $\mathsf{FV}(B \cdot A\colon \beta) = FV(A\colon \alpha) \cup \mathsf{FV}(B\colon \alpha \to \beta)$.

(2) Definire la rappresentazione nel λ-calcolo delle enumerazioni.

[Definizione 15.4, slide 317 e 318]

Le enumerazioni sono codificate dalla seguente struttura dati

$$\mathsf{Enum} = \langle \{\, \mathsf{enum} \,\}, \{\, \mathsf{e}_1\colon \mathsf{enum}, \dots, \mathsf{e}_n\colon \mathsf{enum} \,\}\rangle \;.$$

Rappresentiamo gli elementi di una enumerazione come λ-termini seguendo la regola generale, ottenendo che $\mathsf{e}_i \equiv \lambda x_1, \dots, x_n.\, x_i$.

Il selettore per le enumerazioni è $\mathsf{Case} \equiv \lambda p, x_1, \dots, x_n.\, p\, x_1 \,\dots\, x_n$ che ha la proprietà $\mathsf{Case}\, e_i\, a_1 \,\dots\, a_n =_\beta a_i$.

Quindi la sintassi

case e

e_1 : a_1

$\vdots$

$\mathrm{e}_n : a_n$

end

è una presentazione leggibile di $(\mathsf{Case}\, e\, a_1\ \ldots\ a_n)$.

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

Esiste un modello non standard dell'aritmetica.

[Enunciato 20.4, slide 413]

Sia $S^0(0) = 0$, e $S^{i+1}(0) = S\,S^i(0)$. Evidentemente il termine $S^n(0)$ viene interpretato in n in ogni modello.

Sia $\Sigma_n = \{x \neq S^i(0) \colon i < n\}$ una collezione di formule per ogni $n \in \mathbb{N}$ con x una variabile fissata, e sia $\Sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$.

Detta $\mathcal{M}$ la struttura del modello standard,e definendo σ_n in modo tale che $\sigma_n(x) = n$, il modello standard $(\mathcal{M}, \sigma_n)$ rende vera Σ_n con tutti gli assiomi dell'aritmetica.

Pertanto, ogni $\Xi \subset \Sigma$ finito ha un modello, essendo contenuto in Σ_n per qualche n. Quindi, pr il Teorema di Compattezza, Σ ha un modello $(\mathcal{N}, \sigma)$ che rende vera anche la teoria dell'aritmetica.

In questo modello $\sigma(x) \neq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ poiché $[\![S^n(0)]\!]_{\mathcal{N}} = n$ ma $x \neq S^n(0)$ occorre in Σ, quindi, per definizione di interpretazione, $\sigma(x) \neq [\![S^n(0)]\!]_{\mathcal{N}}$.

Quindi esiste un elemento $k \notin \mathbb{N}$ tale che $\sigma(x) = k$. Ma interpretando x su $\mathcal{M}$ ci porta a qualche $n \in \mathbb{N}$, qualsiasi valutazione delle variabili possiamo scegliere. Quindi, ogni funzione che mappi $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ deve essere non invertibile sul termine x. In conclusione, $(\mathcal{N}, \sigma)$ è un modello dell'aritmetica che non è isomorfo ad alcun modello standard, pertanto esso è non-standard.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Provare $\vdash ((A \supset B) \supset A) \supset A$.

[Esempio 3.19, slide 95]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\,\text{lem} \qquad [A]^1 \qquad \dfrac{[(A \supset B) \supset A]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \quad [A]^3}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{B}\,\bot\mathrm{E}}{A \supset B}\,{\supset}\mathrm{I}^3}{A}\,{\supset}\mathrm{E}}{A}\,{\vee}\mathrm{E}^1}{((A \supset B) \supset A) \supset A}\,{\supset}\mathrm{I}^2$$

(2) Provare $\forall x.\, B \supset A = B \supset \forall x.\, A$ con $x \notin \mathsf{FV}(B)$

[Esempio 10.7, slide 220]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^1 \qquad \dfrac{[\forall x.\, B \supset A]^2}{B \supset A}\,\forall E}{A}\,\supset E}{\dfrac{\forall x.\, A}{B \supset \forall x.\, A}\,\supset I^1}\,\forall I}{(\forall x.\, B \supset A) \supset (B \supset \forall x.\, A)}\,\supset I^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B \supset \forall x.\, A]^1 \quad [B]^2}{\forall x.\, A}\,\supset E}{A}\,\forall E}{B \supset A}\,\supset I^2}{\forall x.\, B \supset A}\,\forall I}{(B \supset \forall x.\, A) \supset (\forall x.\, B \supset A)}\,\supset I^1$$