ESAME DI LOGICA

3 FEBBRAIO 2022

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Si definisca la traduzione di Gödel-Gentzen.

[Definizione 18.2, slide 375]

La *traduzione di Gödel-Gentzen* è una mappa da formule in formule induttivamente definita come:

- $(\top)^N = \top$, $(\bot)^N = \bot$;
- per ogni A atomica, $(A)^N = \neg\neg A$;
- $(A \wedge B)^N = (A)^N \wedge (B)^N$;
- $(A \vee B)^N = \neg \left(\neg (A)^N \wedge \neg (B)^N\right)$;
- $(A \supset B)^N = (A)^N \supset (B)^N$;
- $(\forall x \colon s.\, A)^N = \forall x \colon s.\, (A)^N$;
- $(\exists x \colon s.\, A)^N = \neg\forall x \colon s.\, \neg (A)^N$.

(2) Si definisca la struttura dati delle sequenze con i costruttori cons e nil.

[slide 342 e 343]

Le sequenze sono la struttura dati definita da

$$\langle \{\, A, S \,\}, \{\, \mathsf{cons} \colon A \times (\mathbb{1} \to S) \to S, \mathsf{nil} \colon S \,\}\rangle \enspace .$$

dove $\mathbb{1}$ è il *tipo unitario*, che contiene un solo elemento, denotato da $()$.

$$\begin{aligned} \mathsf{cons} &\equiv \lambda x, y, u, v.\, u\, x\, (\mathbf{K}\, (y\, u\, v)) \\ \mathsf{nil} &\equiv \lambda u, v.\, v \enspace . \end{aligned}$$

dove il combinatore $\mathbf{K} \equiv \lambda x, y.\, x$ si presume che non venga ridotto se non quando applicato a due argomenti.

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> Sia Ξ una teoria in cui ogni funzione calcolabile sia rappresentabile, e sia A una formula tale che $\mathsf{FV}(A) = \{y\}$. Allora, esiste una formula δ_A tale che $\mathsf{FV}(\delta_A) = \emptyset$ and $\vdash_\Xi \delta_A = A[\ulcorner \delta_A \urcorner / y]$.

[Lemma 22.1, slide 447]

Si può facilmente dimostrare nella logica pura che

$$\vdash B[k/x] = (\exists z.\, z = k \wedge B)$$

per ogni formula B e per ogni termine t della stessa sorta di x.

Sia $\Delta_{\mathcal{F}}$ la mappa da formule a formule definita come

$$\Delta_{\mathcal{F}}(B) \equiv \exists z. z = \ulcorner B \urcorner \wedge B \ .$$

Questa funzione è evidentemente calcolabile.

Quindi la mappa $\Delta_{\mathbb{N}}$ definita da

$$\Delta_{\mathbb{N}}(g(B)) = g(\Delta_{\mathcal{F}}(B))$$

è totale sull'immagine di g e calcolabile.

Per ipotesi, esiste una formula Δ con $\mathsf{FV}(\Delta) = \{x, y\}$ tale che Δ rappresenta la funzione $\Delta_{\mathbb{N}}$. In particolare, è dimostrabile che

$$\vdash_{\Xi} (y = \ulcorner \Delta_{\mathbb{N}}(g(B)) \urcorner) = \Delta[\ulcorner B \urcorner / x]$$

Senza ledere la generalità, possiamo definire

$$\delta_a \equiv \Delta_{\mathcal{F}}(F)$$

per una qualche formula F da determinarsi.

$$\begin{aligned}
& A[\ulcorner \delta_A \urcorner / y] & \\
\equiv\ & A[\ulcorner \Delta_{\mathcal{F}}(F) \urcorner / y] & \text{(definizione di } \delta_A\text{)} \\
\equiv\ & A[\ulcorner \Delta_{\mathbb{N}}(g(F)) \urcorner / y] & \text{(definizione di } \Delta_{\mathbb{N}}\text{)} \\
=\ & \exists y. y = \ulcorner \Delta_{\mathbb{N}}(g(F)) \urcorner \wedge A & \text{(evitando la sostituzione)} \\
=\ & \exists y. \Delta[\ulcorner F \urcorner / x] \wedge A & \text{(definizione di } \Delta\text{)} \\
=\ & \exists x. x = \ulcorner F \urcorner \wedge \exists y. \Delta \wedge A & \text{(evitando la sostituzione)}
\end{aligned}$$

Quindi, ponendo $F \equiv \exists y. \Delta \wedge A$,

$$\begin{aligned}
\equiv\ & \exists x. x = \ulcorner F \urcorner \wedge F & \text{(definizione di } F\text{)} \\
\equiv\ & \Delta_{\mathcal{F}}(F) & \text{(definizione di } \Delta_{\mathcal{F}}\text{)} \\
\equiv\ & \delta_A & \text{(definizione di } \delta_A\text{)}
\end{aligned}$$

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Provare $\vdash (\neg\neg A \supset \neg\neg B) \supset \neg\neg(A \supset B)$.

[Esempio 3.15. slide 91]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A \supset \neg\neg B]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^3 \quad [\neg A]^4}{\bot}\,{\scriptstyle \neg E}}{\neg\neg A}\,{\scriptstyle \neg I^4}}{\neg\neg B}\,{\scriptstyle \supset E} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(A \supset B)]^1 \quad \dfrac{[B]^5}{A \supset B}\,{\scriptstyle \supset I}}{\bot}\,{\scriptstyle \neg E}}{\neg B}\,{\scriptstyle \neg I^5}}{\dfrac{\bot}{B}\,{\scriptstyle \bot E}}\,{\scriptstyle \neg E}}{}$$

$$\dfrac{\dfrac{[\neg(A \supset B)]^1 \qquad \dfrac{B}{A \supset B}\,{\scriptstyle \supset I^3}}{\dfrac{\bot}{\neg\neg(A \supset B)}\,{\scriptstyle \neg I^1}}\,{\scriptstyle \neg E}}{(\neg\neg A \supset \neg\neg B) \supset \neg\neg(A \supset B)}\,{\scriptstyle \supset I^2}$$

(2) Costruire un modello dei numeri reali che contenga un numero infinito.

[Esempio 20.6, slide 418]

Estendiamo la segnatura con una nuova costante ∞. Sia $T = \{n < \infty \colon n \in \mathbb{N}\}$ e consideriamo la teoria $R \cup T$, con R la teoria dei reali.

Se $F \subseteq R \cup T$ è finito, allora il massimo m tale che o $(m < \infty) \in F$ oppure $m = 0$ è definito. Quindi, interpretare ∞ in $m + 1$ nel modello standard dei reali rende F vero.

Quindi, per il Teorema di Compattezza, $R \cup T$ ha un modello, e ∞ deve essere interpretato in un elemento che sia più grande di ogni numero naturale. Lo stesso modello rende vero R che quindi diviene un modello alternativo dei numeri reali, in cui esiste un elemento infinito.