ESAME DI LOGICA

7 SETTEMBRE 2021

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Si definisca il risolvente di due clausole al primo ordine.

[Definizione 12.9, slide 267]

Siano A e B due clausole tali che $FV(A) \cap \mathsf{FV}(B) = \emptyset$. Se esistono due insiemi di letterali $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq A$ con $m \geq 1$ e $\{b_1, \ldots, b_k\} \subseteq B$ con $k \geq 1$, tali che $L = \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_k\}$ sia unificabile, allora la clausola

$$R = ((A \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}) \cup (B \setminus \{b_1, \ldots, b_k\}))\sigma \ ,$$

con σ l'unificatore più generale per L, è detta *risolvente*.

(2) Si scrivano le equazioni per definire il funzionale foldr

$$\mathsf{foldr}\, f\, e\, [x_1, \ldots, x_n] = f\, x_1\, (f\, x_2\, (\cdots (f\, x_n\, e) \cdots)) \ .$$

$$\begin{aligned} \mathsf{foldr}\, f\, e\, [] &= e \\ \mathsf{foldr}\, f\, e\, (x :: xs) &= f\, x\, (\mathsf{foldr}\, f\, e\, xs) \ . \end{aligned}$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

Il modello canonico $\mathbb{B}(T)$ per la logica proposizionale classica è un reticolo.

[Enunciato 8.5, slide 185]

Sia $\mathbb{B}(T)$ il modello canonico.

- Si consideri $[A \wedge B]_\sim$:

  $[A \wedge B]_\sim \leq [A]_\sim$ poiché $A \wedge B \vdash_T A$ per $\wedge_1$-eliminazione;

  anche, $[A \wedge B]_\sim \leq [B]_\sim$ poiché $A \wedge B \vdash_T B$ per $\wedge_2$-eliminazione.

  Se $[C]_\sim \leq [A]_\sim$ e $[C]_\sim \leq [B]_\sim$, allora $C \vdash_T A$ e $C \vdash_T B$, quindi $C \vdash_T A \wedge B$ per $\wedge$-introduzione, perciò $[C]_\sim \leq [A \wedge B]_\sim$.

  Quindi, per definizione di $\wedge$ in un ordine, $[A]_\sim \wedge [B]_\sim = [A \wedge B]_\sim$.
- Si consideri $[A \vee B]_\sim$:

  $[A]_\sim \leq [A \vee B]_\sim$ poiché $A \vdash_T A \vee B$ per $\vee_1$-introduzione;

  anche, $[B]_\sim \leq [A \vee B]_\sim$ poiché $B \vdash_T A \vee B$ per $\vee_2$-introduzione.

  Se $[A]_\sim \leq [C]_\sim$ e $[B]_\sim \leq [C]_\sim$, allora $A \vdash_T C$ e $B \vdash_T C$, quindi $A \vee B \vdash_T C$ per $\vee$-eliminazione, pertanto $[A \vee B]_\sim \leq [C]_\sim$.

Quindi, per definizione di $\vee$ in un ordine, $[A]_\sim \vee [B]_\sim = [A \vee B]_\sim$.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si dimostri $\vdash \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

[Esempio 3.11, slide 87]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee B)]^1 \quad \dfrac{[A]^2}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}_1}}{\perp}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg A}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}^2} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee B)]^1 \quad \dfrac{[B]^3}{A \vee B}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}_2}}{\perp}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg B}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}^3}}{\dfrac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B) \supset \neg A \wedge \neg B}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{I}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \vee B]^1 \quad \dfrac{[A]^2 \quad \dfrac{[\neg A \wedge \neg B]^3}{\neg A}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}_1}}{\perp}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}} \quad \dfrac{[B]^2 \quad \dfrac{[\neg A \wedge \neg B]^3}{\neg B}\,{\scriptstyle \wedge\mathrm{E}_2}}{\perp}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\perp}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{E}^2}}{\neg(A \vee B)}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}^1}}{\neg A \wedge \neg B \supset \neg(A \vee B)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^3}$$

(2) Si mostri mediante un controesempio come la restrizione sulle variabili presenti nelle assunzioni della regola di eliminazione del quantificatore esistenziale sia necessaria.

[Esempi 10-5, 10-6, slides 218. 219]

Sia $x \colon s \in \mathsf{FV}(P)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x \colon s.\, P]^1 \quad \dfrac{[P \supset Q]^2 \quad [P]^3}{Q}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{E}}}{Q}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{E}^3}}{(\exists x \colon s.\, P) \supset Q}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}}{(P \supset Q) \supset ((\exists x \colon s.\, P) \supset Q)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^2}}{\forall x \colon s.\, ((P \supset Q) \supset ((\exists x \colon s.\, P) \supset Q))}\,{\scriptstyle \forall\mathrm{I}}$$

Nell'aritmetica, sia $Q \equiv \perp$, in modo che la conclusione si riduca a $\forall x \colon s.\, (\neg P \supset \neg \exists x \colon s.\, P)$. Se P sta per 'x è pari', poiché $P[1/x]$ è falso, la conclusione permette di dedurre che non vi sono numeri naturali pari!

Sia $x \in \mathsf{FV}(A)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x \colon s.\, A]^1 \quad [A]^2}{A}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{E}^2}}{\forall x \colon s.\, A}\,{\scriptstyle \forall\mathrm{I}}}{(\exists x \colon s.\, A) \supset (\forall x \colon s.\, A)}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}$$

Nell'aritmetica, sia A la formula che afferma che il suo argomento è pari. Poiché c'è almeno un numero pari, 2 per esempio, ne segue che ogni numero debba essere pari.