ESAME DI LOGICA

22 LUGLIO 2021

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Si scrivano le regole del calcolo proposizionale classico.

[slide 70]

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathrm{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A}\wedge\mathrm{E}_1 \qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E}_2 \qquad \frac{\bot}{A}\bot\mathrm{E}$$

$$\frac{A}{A \vee B}\vee\mathrm{I}_1 \qquad \frac{B}{A \vee B}\vee\mathrm{I}_2 \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\vee\mathrm{E} \qquad \frac{}{\top}\top\mathrm{I}$$

$$\frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\supset\mathrm{I} \qquad \frac{A \supset B \quad A}{B}\supset\mathrm{E} \qquad \frac{}{A \vee \neg A}\mathrm{lem} \qquad \frac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\neg\mathrm{I} \qquad \frac{\neg A \quad A}{\bot}\neg\mathrm{E}$$

(2) Si scrivano le equazioni per definire il funzionale foldl

$$\mathsf{foldl}\, f\, e [x_1, \dots, x_n] = f\, x_n\, (f\, x_{n-1}\, (\cdots (f\, x_1\, e) \cdots)) \ .$$

$$\mathsf{foldl}\, f\, e\, [\,] = e$$
$$\mathsf{foldl}\, f\, e\, (x :: xs) = \mathsf{foldl}\, f\, (f\, x\, e)\, xs$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> Un insieme finito di clausole proposizionali S è insoddisfacibile se e solo se $S \vdash_{\mathsf{res}} \bot$.

[Teorema 12.4, slide 260]

Sia $S \vdash_{\mathsf{res}} \bot$. Supponiamo che S sia soddisfacibile.

Quindi esiste una interpretazione $[\![\ ]\!]$ tale che $[\![S]\!] = 1$. Per induzione sulla dimostrazione e per l'enunciato 12.3, è immediato concludere che $[\![\bot]\!] = 1$, impossibile. Pertanto, S deve essere insoddisfacibile.

Sia S insoddisfacibile.

Per induzione su n, dimostriamo che se T è insoddisfacibile e contiene n variabili distinte, allora $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$:

- se $n = 0$, allora necessariamente $T = \{\bot\}$, in quanto $T = \emptyset$ è soddisfacibile da qualsiasi assegnamento. Quindi $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ in modo banale.
- se T contiene $n + 1$ variabili, possiamo supporre senza ledere la generalità che nessuna clausola di T contenga un letterale e la sua negazione.

  Prendiamo una variabile x e costruiamo

$$
\begin{aligned}
T_x &= \{c \setminus \{x\} : c \in T \land \neg x \notin c\} \\
T'_x &= \{c : c \in T \land \neg x \notin c\} \\
T_{\neg x} &= \{c \setminus \{\neg x\} : c \in T \land x \notin c\} \\
T'_{\neg x} &= \{c : c \in T \land x \notin c\}
\end{aligned}
$$

  T_x e $T_{\neg x}$ sono insoddisfacibili e contengono n variabili.

Infatti, se T_x fosse soddisfatto da σ, allora σ estesa ad x ponendo $\sigma(x) = 0$ renderebbe vero T contro ipotesi. Analogamente per $T_{\neg x}$.

Quindi, per ipotesi induttiva $T_x \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ e $T_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \bot$.

Nelle due dimostrazioni, ripristinando la variabile x ove sia stata elisa, otteniamo che $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ oppure $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} x$, e $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ oppure $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \neg x$.

Se $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} \bot$ o $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \bot$, allora $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$, e abbiamo concluso.

Altrimenti $T'_x \vdash_{\mathsf{res}} x$ e $T'_{\neg x} \vdash_{\mathsf{res}} \neg x$, quindi $T \vdash_{\mathsf{res}} x$ e $T \vdash_{\mathsf{res}} \neg x$. Quindi, con un passo di risoluzione, $T \vdash_{\mathsf{res}} \bot$.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Dimostrare $\vdash \neg A = \neg\neg\neg A$.

[Esempio 3.17, slide 98]

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\neg A]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^3}{\bot}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg\neg A}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}^2}}{\bot}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg A}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}^3}}{\neg\neg\neg A \supset \neg A}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]^1 \quad [\neg A]^2}{\bot}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg\neg\neg A}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}^1}}{\neg A \supset \neg\neg\neg A}\,{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^2}
$$

(2) Dimostrare che esiste una funzione non calcolabile.

[slide 467]

Come abbiamo visto, l'insieme dei programmi che si possono scrivere in un linguaggio di programmazione è in biiezione con $\mathbb{N}$.

L'insieme delle funzioni $\mathbb{N} \to \{0,1\} \cong [0,1] > \mathbb{N}$. Pertanto, esiste una funzione che non può essere calcolata da un programma.