ESAME DI LOGICA

22 GIUGNO 2021

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Si definisca l'interpretazione delle formule su una Σ-struttura nella logica classica al primo ordine.

[Definizione 11.3, slide 242]

Sia $\Sigma = \langle S; F, R\rangle$ una segnatura, sia $\mathcal{M}$ una Σ-struttura, e sia ν una *valutazione delle variabili*, con la notazione come in precedenza.

Quindi, una formula A è interpretata secondo la seguente definizione induttiva sulla sua struttura:

- se $A \equiv \top$, $[\![A]\!] = 1$;
- se $A \equiv \bot$, $[\![A]\!] = 0$;
- se $A \equiv r(t_1, \ldots, t_n)$, $[\![A]\!] = 1$ quando $([\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!]) \in [\![r]\!]$, e $[\![A]\!] = 0$ altrimenti;
- se $A \equiv \neg B$, $A \equiv B \wedge C$, $A \equiv B \vee C$, $A \equiv B \supset C$ allora $[\![A]\!]$ è definita come nella semantica a tavole di verità;
- se $A \equiv \forall x \colon s.\, B$ or $A \equiv \exists x \colon s.\, B$, sia $\xi = \{\xi_s\}_{s \in S}$ una valutazione di variabili tale che $\xi_\alpha = \nu_\alpha$ per ogni $\alpha \neq s$, e $\xi_s(v) = \nu_s(v)$ per ogni $v \neq x$. Allora, $[\![\forall x \colon s.\, B]\!] = 1$ se, per ogni possibile ξ, $[\![B]\!] = 1$, e $[\![\forall x \colon s.\, B]\!] = 0$ altrimenti. Inoltre, $[\![\exists x \colon s.\, B]\!] = 1$ se esiste uno ξ tale che $[\![B]\!] = 1$, e $[\![\exists x \colon s.\, B]\!] = 0$ altrimenti.

Stipuliamo che, se l'uguaglianza è presente nel linguaggio, $[\![t_1 = t_2]\!] = 1$ esattamente quando $[\![t_1]\!] = [\![t_2]\!]$.

(2) Si scrivano le equazioni per definire il funzionale map operante sulla struttura dati delle liste.

[slide 339]

Il funzionale map è definito come

$$\begin{aligned} \mathsf{map}\; f\; [] &= [] \\ \mathsf{map}\; f\; (x :: xs) &= (f\; x) :: (\mathsf{map}\; f\; xs) \ . \end{aligned}$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

Esiste un combinatore $\mathbf{Y}$ tale che $\mathbf{Y}x =_\beta x(\mathbf{Y}x)$.

[Teorema 14.12, slide 300]

Sia $U \equiv \lambda u, x.\, x(uux)$, e sia $\mathbf{Y} \equiv UU$.

Allora $\mathbf{Y}x \equiv (\lambda u, x.\, x(uux))Ux \rhd_\beta (\lambda x.\, x(UUx))x \rhd_\beta x(UUx) \equiv x(\mathbf{Y}x)$.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Dimostrare $\vdash A \lor B = \neg A \supset B$.

[Esempio 3.22, slide 98]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \lor B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [\neg A]^3}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{B}\,\bot\mathrm{E} \qquad [B]^2}{B}\,\lor\mathrm{E}^2}{\neg A \supset B}\,\supset\mathrm{I}^3}{A \lor B \supset (\neg A \supset B)}\,\supset\mathrm{I}^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \lor \neg A}\,\mathrm{lem} \qquad \dfrac{[A]^1}{A \lor B}\,\lor\mathrm{I}_1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]^1 \quad [\neg A \supset B]^2}{B}\,\supset\mathrm{E}}{A \lor B}\,\lor\mathrm{I}_2}{A \lor B}\,\lor\mathrm{E}^1}{(\neg A \supset B) \supset A \lor B}\,\supset\mathrm{I}^2$$

(2) Costruire un modello dei numeri reali in cui sono presenti numeri infiniti.

[Esempio 20.6, slide 418]

Estendiamo la segnatura con una nuova costante ∞. Sia $T = \{n < \infty : n \in \mathbb{N}\}$ e consideriamo la teoria $R \cup T$.

Se $F \subseteq R \cup T$ è finito, allora il massimo m tale che o $(m < \infty) \in F$ oppure $m = 0$ è definito. Quindi, interpretare ∞ in $m + 1$ nel modello standard dei reali rende F vero.

Quindi, per il Teorema di Compattezza, $R \cup T$ ha un modello, e ∞ deve essere interpretato in un elemento che sia più grande di ogni numero naturale. Lo stesso modello rende vero R che quindi diviene un modello alternativo dei numeri reali, in cui esiste un elemento infinito.