ESAME DI LOGICA

10 GIUGNO 2021

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Nella logica al primo ordine, si definisca l'operazione di sostituzione nei termini e nelle formule.

[Definizione 9.9, slide 204 & Definizione 9.10, slide 205]

Fissata una segnatura e un termine t in essa, la *sostituzione* della variabile $x\colon s$ con il termine $r\colon s$, che produce $t[r/x]$, è definita per induzione sulla struttura del termine t:

- se $t \equiv x$, allora $t[r/x] = r$;
- se t è una variabile $t \not\equiv x$, allora $t[r/x] = t$;
- se $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$, allora $t[r/x] = f(t_1[r/x], \ldots, t_n[r/x])$.

Fissata una segnature e una formula A su di essa, la *sostituzione* della variabile $x\colon s$ con il termine $t\colon s$, che produce $A[t/x]$, è definita per induzione sulla struttura della formula A:

- se $A \equiv \top$ o $A \equiv \bot$, allora $A[t/x] = A$;
- se $A \equiv r(t_1, \ldots, t_n)$, allora $A[t/x] = r(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$;
- se $A \equiv \neg B$, allora $A[t/x] = \neg B[t/x]$;
- se $A \equiv B \wedge C$, $A \equiv B \vee C$, o $A \equiv B \supset C$, allora $A[t/x] = B[t/x] \wedge C[t/x]$, $A[t/x] = B[t/x] \vee C[t/x]$, o $A[t/x] = B[t/x] \supset C[t/x]$, rispettivamente;
- se $A \equiv \forall y\colon r.\, B$, o $A \equiv \exists y\colon r.\, B$, e $y\colon r \equiv x\colon s$, allora $A[t/x] = A$;
- se $A \equiv \forall y\colon r.\, B$, o $A \equiv \exists y\colon r.\, B$, e $y\colon r \not\equiv x\colon s$, allora $A[t/x] = \forall z\colon r.\, (B[z/y])[t/x]$, o $A[t/x] = \exists z\colon r.\, (B[z/y])[t/x]$, rispettivamente, dove $z\colon r \notin \mathsf{FV}(B) \cup \mathsf{FV}(t)$.

(2) Si definiscano le equazioni che permettono di sintetizzare l'operazione di concatenazione nella struttura dati delle liste.

[slide 337]

Usiamo l'operatore @ per denotare l'operazione:

$$\begin{aligned} [\,] \mathbin{@} L &= L \\ (x :: xs) \mathbin{@} L &= x :: (xs \mathbin{@} L) \enspace . \end{aligned}$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

In qualsiasi reticolo distributivo, per ogni x, y e z,

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \ .$$

[Enunciato 6.12, slide 147]

$$\begin{aligned}
& (x \vee y) \wedge (x \vee z) && \\
={} & ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) && \text{distributività} \\
={} & (x \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{distributività due volte} \\
={} & x \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{idempotenza} \\
={} & x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && \text{assorbimento} \\
={} & x \vee (y \wedge z) && \text{assorbimento}
\end{aligned}$$

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si provi $\vdash \neg\neg(A \wedge B) \supset \neg\neg A \wedge \neg\neg B$.

[Esercizio 3.12, slide 88]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg(A\wedge B)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \qquad \dfrac{[A\wedge B]^3}{A}\,{\scriptstyle\wedge\mathrm{E}_1}}{\bot}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{E}}}{\neg(A\wedge B)}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{I}^3}}{\bot}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{E}}}{\neg\neg A}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{I}^2} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg\neg(A\wedge B)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg B]^4 \qquad \dfrac{[A\wedge B]^5}{B}\,{\scriptstyle\wedge\mathrm{E}_2}}{\bot}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{E}}}{\neg(A\wedge B)}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{I}^5}}{\bot}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{E}}}{\neg\neg B}\,{\scriptstyle\neg\mathrm{I}^4}}{\neg\neg A \wedge \neg\neg B}\,{\scriptstyle\wedge\mathrm{I}}}{\neg\neg(A\wedge B) \supset \neg\neg A \wedge \neg\neg B}\,{\scriptstyle\supset\mathrm{I}^1}$$

(2) Dimostrare con un esempio che la restrizione sulle variabili nella regola di introduzione del quantificatore universale sia essenziale per garantire la correttezza della medesima.

[Esempio 10.4, slide 217]

Sia $x\colon s \in \mathsf{FV}(P)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]^1}{\forall x\colon s.\, P}\,{\scriptstyle\forall\mathrm{I}}}{P \supset \forall x\colon s.\, P}\,{\scriptstyle\supset\mathrm{I}^1}}{\forall x\colon s.\,(P \supset \forall x\colon s.\, P)}\,{\scriptstyle\forall\mathrm{I}}$$

L'istanza della regola $\forall I$ in cima è invalida, poiché $x\colon s$ appare nelle assunzioni che sono non scaricate in quel momento della prova.

In aritmetica, se P sta per 'x è pari', la conclusione permette di dimostrare che, dato che $P[0/x]$ è vero, ogni numero naturale è pari!