ESAME DI LOGICA

ESEMPIO

Nome e Cognome: Matricola:

Parte A

Questa parte vale il 30% del voto finale.

(1) Definire la rappresentazione dei termini di una struttura dati in λ-calcolo.

[Definizione 15.2, slide 313]

Sia $D = \langle S, F \rangle$ una struttura dati, con $F = \{ f_1, \dots, f_n \}$. Un termine t su D ha la forma $f(t_1, \dots, t_m)$ con $f \colon s_1 \times \dots \times s_m \to s$ e $t_1, \dots, t_m$ termini di tipo $s_1, \dots, s_m$.

Questo termine è rappresentato da un λ-termine $\underline{t} \equiv \underline{f}\,\underline{t_1}\,\dots\,\underline{t_m}$ dove $f \equiv f_i$ per qualche indice i e $\underline{f} \equiv \lambda x_1, \dots, x_m, f_1, \dots, f_n.\, f_i\,\underline{s_1}\,\dots\,\underline{s_m}$ con

$$\underline{s_i} \equiv \begin{cases} x_i & \text{se } s_i \text{ è una sorta parametrica} \\ (x_i\, f_1\, \dots\, f_n) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(2) Si consideri la struttura dati dei record

```
record
  key: ℕ;
  value: ℕ;
end
```

Si rappresenti il costruttore record nel λ-calcolo e si derivino i λ-termini per key e value.

[Variante dei risultati alla slide 319]

Notiamo che la struttura dati indicata è il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, quindi essa è rappresentata dai seguenti termini, secondo la rappresentazione standard:

$$\begin{aligned} \mathsf{record} &\equiv \lambda x_1, x_2, y.\, y\, x_1\, x_2 \\ \mathsf{key} &\equiv \lambda y.\, y\, (\lambda x_1, x_2.\, x_1) \\ \mathsf{value} &\equiv \lambda y.\, y\, (\lambda x_1, x_2.\, x_2) \end{aligned}$$

Parte B

Questa parte vale il 30% del voto finale.

Si dimostri il seguente teorema:

> Ogni formula proposizionale è equivalente ad una forma normale congiuntiva e ad una forma normale disgiuntiva.

[Teorema 5.4, slide 119]

Sia F una formula. Innanzitutto notiamo che possiamo eliminare i connettivi $=$ e $\supset$ usando le seguenti equivalenze:

- $A = B$ equivale a $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$,
- $A \supset B$ equivale a $\neg A \vee B$,

Pertanto, non lede la generalità assumere che F contenga solo negazioni, congiunzioni e disgiunzioni.

Procediamo per induzione sulla formula F:

- se F è una singola variabile, essa è in forma normale congiuntiva e disgiuntiva, banalmente.
- se $F = \neg F'$, per ipotesi induttiva F' equivale a $\bigwedge_i C_i$ in forma normale congiuntiva, e a $\bigvee_j D_j$ in forma normale disgiuntiva.
  Pertanto, F equivale a $\neg \bigwedge_i C_i$ e $\neg \bigvee_j D_j$.
  Applicando le leggi di De Morgan, $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ e $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$, otteniamo che F equivale a $\bigvee_i \neg C_i$ e $\bigwedge_j \neg D_j$.
  Poiché $C_i = \bigvee_k l_{i,k}$ e $D_j = \bigwedge l_{j,k}$ con l un letterale, applicando nuovamente le leggi di De Morgan, F' equivale a $\bigvee_i \bigwedge_k \neg l_{i,k}$ e $\bigwedge_j \bigvee_k \neg l_{j,k}$.
  Eliminando le eventuali doppie negazioni, queste due formule sono forme normali disgiuntive e congiuntive, rispettivamente.
- Se $F = F_1 \vee F_2$, per ipotesi induttiva F_1 equivale a D_1 in forma normale disgiuntiva e C_1 in forma normale congiuntiva. Allo stesso modo per F_2 che equivale a D_2 e C_2.
  Pertanto F equivale a $D_1 \vee D_2$ che è una forma normale disgiuntiva.
  Consideriamo le clausole c_i^1 di C_1 e c_j^2 di C_2 e costruiamo $e_{i,j} = c_i^1 \vee c_j^2$.
  È immediato verificare che $\bigwedge_{i,j} e_{i,j}$ è in forma normale congiuntiva.
  Altrettanto semplice è verificare che $\bigwedge_{i,j} e_{i,j}$ equivale a F.
- Il caso $F = F_1 \wedge F_2$ è completamente simmetrico.

Parte C

Questa parte vale il 40% del voto finale.

(1) Si dimostri $\vdash A \supset B = \neg B \supset \neg A$.
[Esempio 3.20, slide 96]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \supset B]^1 \quad [A]^2}{B}{\scriptstyle \supset\mathrm{E}} \quad [\neg B]^3}{\bot}{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg A}{\scriptstyle \neg\mathrm{I}^2}}{\neg B \supset \neg A}{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^3}}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vee \neg B}{\scriptstyle \mathrm{lem}} \quad [B]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B \supset \neg A]^2 \quad [\neg B]^1}{\neg A}{\scriptstyle \supset\mathrm{E}} \quad [A]^3}{\bot}{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{B}{\scriptstyle \bot\mathrm{E}}}{B}{\scriptstyle \vee\mathrm{E}^1}}{A \supset B}{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^3}}{(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)}{\scriptstyle \supset\mathrm{I}^2}$$

(2) Si costruisca un modello dei numeri reali in cui esistono degli infinitesimi.
[Esempio 20.7, slide 419]
Estendiamo la segnatura con una nuova costante k.
Sia $T = \left\{0 < k < \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Se $F \subseteq R \cup T$ è finito, esiste il massimo m per cui $\left(0 < k < \frac{1}{m+1}\right) \in F$ oppure $m = 0$. Quindi, interpretando k in $\frac{1}{m+2}$, F è valido nel modello standard. Pertanto, per il Teorema di Compattezza, $R \cup T$ ha un modello, e k deve essere un infinitesimo. Lo stesso modello valida R, quindi è un modello alternativo dei reali con un elemento infinitesimo.